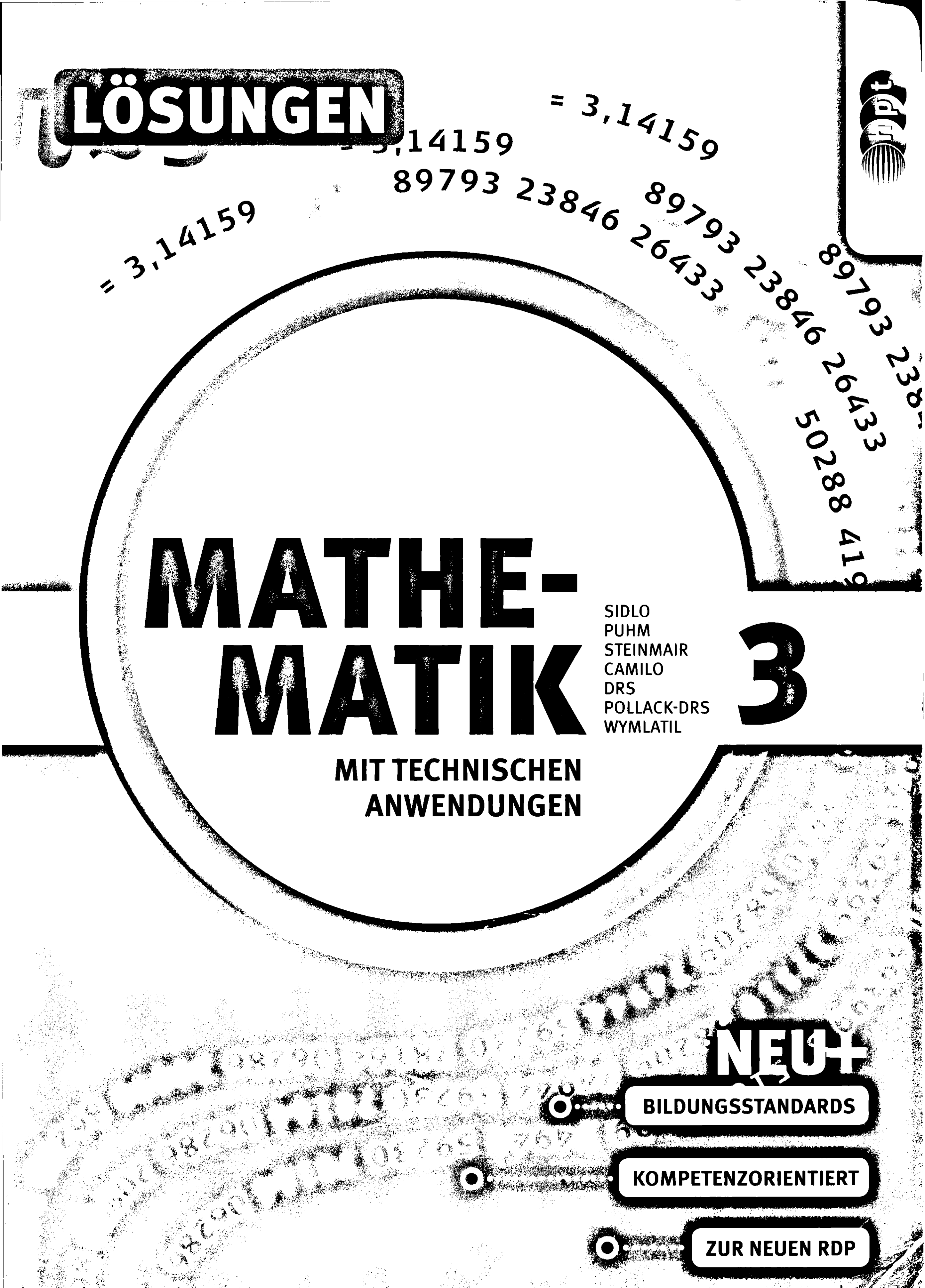

LÖSUNGEN
MATHE-
MATIK
SIDLO
PUHM
STEINMAIR
CAMILO
DRS
POLLACK-DRS
WYMLATIL
3
MIT TECHNISCHEN
ANWENDUNGEN
NEU+
BILDUNGSSTANDARDS
KOMPETENZORIENTIERT
ZUR NEUEN RDP

Eva-Maria Sidlo
Ursula Puhm
Cornelia Steinmair
Christina Camilo
Wolfgang Drs
Susanne Pollack-Drs
Georg Wymlatil

Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 3

Lösungen

bearbeitet von
Petrus Dullnig und Birgit Schiefer

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH
www.hpt.at

Dieses Lösungsheft enthält die Lösungen zu den Aufgaben in folgendem Schulbuch:

Schulbuch Nr. 165008 „Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 3"

Die Autorinnen und Autoren sowie der Verlag bitten, alle Anregungen und Vorschläge, die dieses Lösungsheft betreffen, an folgende Adresse zu senden:

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Lektorat
1090 Wien, Frankgasse 4
E-mail: service@hpt.at

1. Auflage, Nachdruck 2015 (1,01)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Barbara Fischer, 1230 Wien
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, 2752 Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-03637-7

Unendliche Folgen und Reihen

1.1 ***1)*** Zu Beginn befindet sich ein neu geborenes Kaninchenpaar K_0 im Gehege (1), ebenso zu Beginn des zweiten Monats (1), zu Beginn des dritten Monats wird ein Kaninchenpaar K_1 geboren (2), zu Beginn des vierten Monats wirft das ursprüngliche Kaninchenpaar K_0 ein weiteres Paar Junge K_2, die Kindergeneration K_1 aber noch nicht (3), zu Beginn des fünften Monats werden von K_0 und K_1 jeweils ein Kaninchenpaar K_3 und K_4 geboren (5) usw.

2) $\langle ..., 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1\,597, 2\,584, 4\,181, ...\rangle$
Ein Folgeglied ist die Summe der beiden vorangehenden Glieder. Die ersten beiden Glieder sind jeweils 1.
233 Kaninchenpaare

3) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

1.5 ***a)*** $\langle 2, 5, 17, 65, 257\rangle$ ***b)*** $\langle -2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2\rangle$ ***c)*** $\langle 10^8, 10^4, 10^2, 10^1, 10^{\frac{1}{2}}\rangle$

1.6 ***a)*** $\langle 6, 12, 24, 48, 96\rangle$ ***b)*** $\langle 0, 1, 0, -3, -8\rangle$ ***c)*** $\langle 1, 1, 1, 1, 1\rangle$

1.7 ***a)*** $a_{n+1} = a_n + 5$ mit $a_1 = 2$ — Das erste Folgeglied ist 2, die Folgeglieder werden jeweils um 5 größer.

b) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$ mit $a_1 = -\frac{1}{2}$ — Das erste Folgeglied ist $-\frac{1}{2}$, die Folgeglieder werden jeweils um $\frac{1}{2}$ kleiner.

c) $a_{n+1} = 3a_n$ mit $a_1 = 1$ — Das erste Folgeglied ist 1, das nachfolgende Glied ist jeweils das Dreifache des vorhergehenden.

d) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ mit $a_1 = \frac{1}{2}$ — Das erste Folgeglied ist $\frac{1}{2}$, das nachfolgende Glied ist jeweils die Hälfte des vorhergehenden.

1.8 ***a)*** $a_n = 2n - 1$ — Folge der ungeraden Zahlen

b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ — alternierende harmonische Folge

c) $a_n = 10^{n-1}$ — Zehnerpotenzen

d) $a_n = \frac{n}{n+1}$ — Zähler: natürliche Zahlen, beginnend mit eins
Nenner: natürliche Zahlen, um eins größer als der Zähler

1.9 ***a)*** $\langle 2, 1, 0, -1, -2\rangle$ ***b)*** $\langle 5, 1, 16, 19, 67\rangle$

1.10 ***a) 1)*** $\langle -4{,}888..., -4{,}777..., -4{,}554..., -4{,}109..., -3{,}218\,75, -1{,}437\,5, 2{,}125, 9{,}25, 23{,}5, 52\rangle$

2) $a_{40} = 61\,203\,283\,963$

b) 1) $\langle \sqrt[27]{10}, \sqrt[9]{10}, \sqrt[3]{10}, 10, 10^3, 10^9, 10^{27}, 10^{81}, 10^{243}, 10^{729}\rangle$

2) $a_{50} = 10^{(3^{46})}$

1.11 ***1)*** $\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1\,597, 2\,584, 4\,181, 6\,765\rangle$

2) $f_{45} = 1\,134\,903\,170$

3) $f_3 = 2$

1.12 ***1)*** Bei $\langle a_n\rangle$ ist die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern 2, bei $\langle b_n\rangle$ ist der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern 2.

2) $a_n = 2n - 1$ $\quad a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 1$
$b_n = 2^{n-1}$ $\quad b_{n+1} = 2b_n$ mit $b_1 = 1$

1.13 – 1.19

1.13 ***a) 1)*** Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant -1 ist. Nicht arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern nicht konstant ist.

2) $b_n = (-1)^{n+1}$, $b_{10} = -1$

b) 1) Weder arithmetisch noch geometrisch, da sowohl die Differenz als auch der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder nicht konstant ist.

2) $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ mit $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_2 = \frac{1}{12}$; $c_{10} = \frac{97}{12}$

c) 1) Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant -2 ist. Nicht geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern nicht konstant ist.

2) $a_n = 3 - 2n$, $a_{10} = -17$

d) 1) Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 3 ist. Nicht arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Glieder nicht konstant ist.

2) $b_{n+1} = 3b_n$ mit $b_1 = \frac{1}{12}$, $b_{10} = 1\,640{,}25$

e) 1) Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 0 ist. Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 1 ist.

2) $a_n = b_n = 2$, $a_{10} = b_{10} = 2$

f) 1) Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant $\frac{1}{3}$ ist. Nicht geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern nicht konstant ist.

2) $a_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{12}$, $a_{10} = \frac{13}{4}$

1.14 ***1)*** Arithmetisch, da die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant -3 ist.

2) Weder noch, um das darauf folgende Glied zu erhalten, muss ein Folgeglied quadriert werden. Es ist daher weder die Differenz noch der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant.

3) Weder noch, um das darauf folgende Glied zu erhalten, muss ein Folgeglied mit dem Faktor 2 multipliziert und die Zahl 3 addiert werden. Es ist daher weder die Differenz noch der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant.

4) Geometrisch, da der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant 2 ist.

1.15 $n = 18$, $s_{20} = 320$

1.16 $q = \frac{3}{2}$, $s_8 = 350{,}2\dot{7}$

1.17 ***1)*** 10,935 m ***2)*** 51,585 m ***3)*** am 11. Tag (10,427...)

1.18 ***1)*** am 31. Tag (30,901...) ***2)*** 963,9 Höhenmeter

1.19 ***1)*** Die beiden geometrischen Folgen unterscheiden sich durch den Quotienten q. Für die Folge $\langle a_n \rangle$ ist $q = 2$, für $\langle b_n \rangle$ ist $q = \frac{1}{2}$.

2) Null ist zB kleiner als jedes Glied von $\langle a_n \rangle$, da das erste Glied der Folge 1 ist und die Folgeglieder immer größer werden. Eine Zahl, die größer ist als jedes Glied von $\langle a_n \rangle$, gibt es aus diesem Grund nicht.

Null ist zB kleiner als jedes Glied von $\langle b_n \rangle$, da ein Folgeglied durch Halbieren des Vorgängers gebildet wird. Durch Halbieren eines noch so kleinen positiven Werts entsteht wieder ein positiver Wert. Zwei ist zB größer als jedes Glied von $\langle b_n \rangle$, da die Folgeglieder immer kleiner werden und das erste Glied eins ist.

1.22 ***1)*** Falsch. Die im Buch auf Seite 9 dargestellte Folge ist streng monoton steigend und hat als Supremum den Wert drei.
2) Richtig. Die Folge ist alternierend.
3) Richtig. Die Glieder einer arithmetischen Folge unterscheiden sich vom Vorgänger um den Wert d. Ist $|d| > 0$, so ist die Folge streng monoton steigend oder fallend, ist $d = 0$, ist sie monoton steigend bzw. fallend.
4) Falsch. Für $a_1 < 0$ ist a_1 eine obere Schranke.

1.23 ***a)*** $n > -\frac{5}{2}$, w.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ***b)*** $0 < 59$, w.A. ***c)*** $0 < n^2 + n - 1$, w.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1.24 ***a)*** $0 < 1$, w.A. ***b)*** $0 < 48n^2 + 28n - 34$, w.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ***c)*** $0 < 5$, w.A.

1.25 ***a)*** $\langle -11{,}4, -17{,}2, -25{,}8, -33{,}6, -37, -32{,}4 \ldots \rangle$; $0 > 1{,}8n^2 - 8{,}2n + 0{,}6 \Rightarrow$ streng monoton fallend für $n \leqslant 5$ bzw. streng monoton steigend für $n \geqslant 5$.
b) $\langle 0{,}157\ldots, 0{,}153\ldots, 0{,}090\ldots, 0, -0{,}106\ldots, \ldots \rangle$; $0 > 7n^2 + 31n - 36 \Rightarrow$ streng monoton fallend
c) $\langle 1, 3, 4{,}795\ldots, 6{,}557\ldots, 8{,}306\ldots, \ldots \rangle$; $-\frac{1}{3} < n \Rightarrow$ streng monoton steigend
d) $\langle 9, 81, -27, 10{,}497\ldots, -3{,}513\ldots, 1, \ldots \rangle$; die Folge ist ab $n \geqslant 2$ alternierend $\Rightarrow$ keine Monotonie

1.26 ***a)*** obere Schranken: zB 3, 7, 11; untere Schranken: zB –1, –3, –4
b) obere Schranken: zB 4, 10, 30; untere Schranken: zB 0, –4, –7
c) obere Schranken: zB 1, 2, 3; untere Schranken: zB –1, –3, –9
d) obere Schranken: zB 3, 4, 5; untere Schranken: zB –2, –4, –5

1.27 ***a)*** a ist keine obere Schranke, b ist eine untere Schranke.
b) a ist eine obere Schranke, b ist eine untere Schranke.

1.28 ***a)*** $\sup \langle a_n \rangle = a_1 = \frac{1}{3}$; die Folge ist streng monoton fallend.
$\inf \langle a_n \rangle = 0$; $\frac{1}{1 + 2n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
b) $\nexists \sup \langle a_n \rangle$; $\nexists \inf \langle a_n \rangle$; die Folge ist alternierend, die Absolutbeträge der Folgeglieder sind monoton steigend.
c) $\sup \langle a_n \rangle = \ln(3)$; die Folge ist streng monoton fallend.
$\inf \langle a_n \rangle = 0$; Umformen des Terms der Folge mithilfe der Logarithmusgesetze ergibt $a_n = \ln\left(\frac{n^2 + 2}{n^2}\right)$. Für $n \to \infty$ geht a_n gegen $\ln(1) = 0$. Da die Folge streng monoton fallend ist, ist der Grenzwert gleichzeitig der kleinste Wert.
d) $\nexists \sup \langle a_n \rangle$; $\inf \langle a_n \rangle = a_1 = 1$; die Folge ist streng monoton steigend.

1.29 ***1)*** Ja. ***2)*** Die Differenz wird immer kleiner, je mehr Schülerinnen und Schüler mitmachen.

1.31 ***1)*** Falsch. Hat eine Folge mehrere Häufungswerte, dann liegen nicht alle bis auf endlich viele Glieder in jeder ε-Umgebung zu jedem Häufungswert, sondern es liegen auch unendlich viele außerhalb.

2) Richtig. Ist g Grenzwert einer Folge, dann liegen unendlich viele Glieder innerhalb der ε-Umgebung von g. g ist somit auch ein Häufungswert der Folge.
3) Falsch. Die Folge $\langle -\frac{1}{n} \rangle$ ist eine Nullfolge und hat nur negative Werte.
4) Richtig. Die Glieder nehmen nur die Werte –1 und 1 an, diese sind daher Häufungswerte.

1.32 ***1)*** $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ ***2)*** $a_n = 3 \cdot (-1)^n$ ***3)*** $a_n = \frac{1}{(-2)^n}$ ***4)*** $a_n = (-1)^n \cdot 7$

1.33 ***a)*** Konvergent, da die Folge streng monoton fallend ist, die Folgeglieder aber nicht negativ werden.
b) Divergent, da die Folge streng monoton wachsend ist.
c) Divergent, da die Folge streng monoton wachsend ist.

1.34 ***a)*** Häufungswerte ***b)*** keines von beiden ***c)*** Grenzwert ***d)*** Häufungswerte

1.35 ***a)*** $g = 0{,}5$ ***b)*** $g = 0{,}\dot{3}$

1.36 Die Behauptung kann nicht stimmen, da sich $\langle a_n \rangle$ dem Wert 2 nähert, $\langle b_n \rangle$ dem Wert $\frac{1}{2}$ und $\langle c_n \rangle$ dem Wert null.

1.38 ***a)*** 0 ***b)*** 8 ***c)*** ∞ ***d)*** 0

1.39 ***a)*** $g = 1$, 10 Glieder ***b)*** $g = 4{,}5$, 17 Glieder ***c)*** $g = 0$, 4 Glieder

1.40 ***1)*** $a_n = \frac{5n-1}{n}$ ***2)*** $a_n = \frac{2n^2+7n-1}{3n^2}$

1.41 ***1)*** 130 bzw. 200 ***2)*** 70 bzw. 200

1.42 $\langle 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots \rangle$; $s_{10} = 110$
Einsetzen von $a_1 = 2$ und $d = 2$ in die Summenformel für arithmetische Reihen
$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$ und Zusammenfassen ergibt $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2n + 2)$.
Herausheben und Kürzen von 2 ergibt die angegebene Formel.

1.45 ***a)*** $2 + 10 + 20 + 32 + 46$
b) $2 + \sqrt[3]{9} + 2 + \sqrt[5]{25} + \sqrt[6]{36} + \sqrt[7]{49} + \sqrt[8]{64}$
c) $\frac{124}{11} + \frac{215}{13} + \frac{342}{15} + \frac{511}{17} + \frac{728}{19} + \frac{999}{21} + \frac{1\,330}{23} + \frac{1\,727}{25}$
d) $500 + 250 + 125 + 62{,}5 + 31{,}25 + 15{,}625 + 7{,}812\,5$

1.46 ***a)*** $\sum_{n=0}^{7}(2n+1)$ ***b)*** $\sum_{n=1}^{5} 7n$ ***c)*** $\sum_{n=0}^{5} 10^n$ ***d)*** $\sum_{n=1}^{11} (-1)^n \cdot 3$

1.47 ***a) 1)*** $-2 + 4 - 8 + 16 - 32$ ***2)*** -22
b) 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ***2)*** $\frac{31}{32}$
c) 1) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$ ***2)*** -6

1.48 ***a) A)*** und ***C)*** geben dieselbe Reihe an.

$$\sum_{i=1}^{7}(-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = \sum_{i=0}^{6}(-1)^{i+1} = -1, \text{ aber}$$

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \text{ und } \sum_{n=1}^{7} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 = 0$$

b) A) und ***C)*** geben dieselbe Reihe an.

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17} = \sum_{n=2}^{9} \frac{1}{2n-1}, \text{ aber}$$

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15} \text{ und } \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19}$$

1.49 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2$, $s_4 = 120$

1.50 ***a)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow f_1 = f_3 - 1$

$1 = 2 - 1$

3. Schritt: $f_1 + f_2 + ... + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$

b) 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow f_1 = f_2$

$1 = 1$

3. Schritt: $f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} + f_{2\cdot(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2\cdot(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2\cdot(n+1)}$

1.51 ***a)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot(1 + 1)$

3. Schritt: $1 + 2 + ... + n + n + 1 = \frac{n}{2}\cdot(n + 1) + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{n+1}{2}\cdot(n + 2)$

b) 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 2\cdot 1 = 1\cdot(1 + 1)$

3. Schritt: $2 + 4 + ... + 2n + 2\cdot(n + 1) = n\cdot(n + 1) + 2\cdot(n + 1) = (n + 1)\cdot(n + 2)$

c) 1. Schritt: $n = m + 1 \Rightarrow LS = 2m + 1 = RS$

3. Schritt: LS: $m + m + 1 + ... + n + n + 1 = \frac{(m + n)\cdot(n - m + 1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 - m^2 + m + 3n + 2}{2}$

RS: $\frac{(m + n + 1)\cdot(n + 1 - m + 1)}{2} = \frac{n^2 - m^2 + m + 3n + 2}{2}$

d) 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 2a + 1 = \frac{(1 + 1)\cdot(2a + 1)}{2}$

3. Schritt: $a + a + 1 + ... + a + n + a + n + 1 = \frac{(n + 1)\cdot(2a + n)}{2} + a + n + 1 =$

$= \frac{2an + 4a + n^2 + 2n + n + 2}{2} = \frac{2a\cdot(n + 2) + n\cdot(n + 2) + 1\cdot(n + 2)}{2} = \frac{(n + 2)\cdot(2a + n + 1)}{2}$

1.52 ***a)*** 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1\cdot(2 - 1)\cdot(2 + 1)}{3}$

3. Schritt: LS: $1^2 + 3^2 + ... + (2n - 1)^2 + (2\cdot(n + 1) - 1)^2 = \frac{n\cdot(2n - 1)\cdot(2n + 1)}{3} + (2n + 1)^2 =$

$= \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$

RS: $\frac{(n + 1)\cdot(2\cdot(n + 1) - 1)\cdot(2\cdot(n + 1) + 1)}{3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$

b) 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^3 = \frac{1^2\cdot 2^2}{4}$

3. Schritt: LS: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{n^2\cdot(n + 1)^2}{4} + (n + 1)^3 = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$

RS: $\frac{(n + 1)^2\cdot(n + 1 + 1)^2}{4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$

1.53 Werden die natürlichen Zahlen {1, 2, 3, ... n} durch Kreise veranschaulicht, so kann die Summe 1 + 2 + 3 + ... + n durch ein Dreieck dargestellt werden. Das Doppelte einer Dreieckszahl entspricht zwei gleichen Dreiecken, die sich zu einem Rechteck zusammenfügen lassen (siehe Abbildung im Buch Seite 17). Dieses Rechteck ist (n + 1) Kreise lang und n Kreise breit und enthält somit $n\cdot(n + 1)$ Kreise. Eine Dreieckszahl entspricht der Hälfte der Kreise, woraus sich die in ***1.51 a)*** angegebene Formel für Dreieckszahlen ergibt.

1.54 ***1)*** bzw. ***2)*** 42 925

3) 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1\cdot(1 + 1)\cdot(2 + 1)}{6}$

3. Schritt: LS: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{n\cdot(n + 1)\cdot(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

RS: $\frac{(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(2\cdot(n + 1) + 1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$

4) Jede Quadratzahl kann durch eine quadratische Schicht gleich großer Würfel dargestellt werden. Die Summe der Quadratzahlen kann durch Aufeinanderstapeln dieser Schichten dargestellt werden (siehe Buch Seite 17). Drei solcher gleicher Pyramiden können zu einem Quader mit den Kantenlängen n, (n + 1) und $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ zusammengefügt werden. Das Volumen des Quaders berechnet sich mit der Formel $n \cdot (n + 1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$ oder $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{2}$.
Um die Summe der Quadratzahlen zu erhalten, muss noch durch 3 dividiert werden, also $\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$.

1.55 Die Schlussfolgerung ist falsch, da man eine Strecke nicht in beliebig kleinen Teilintervallen durchlaufen kann.
Der Weg, den die Schildkröte bis zum Einholen durchläuft, ist um 1 Stadion kürzer als der Weg, den Achilles durchläuft. Ist v die Geschwindigkeit der Schildkröte, so beträgt die Geschwindigkeit von Achilles 12v. Achilles und die Schildkröte sind gleich lang unterwegs, also ist die Zeit für beide t. Die Formel für den Weg s lautet $s = v \cdot t$.
Das ergibt die Gleichung $v \cdot t = 12v \cdot t - 1$ bzw. umgeformt auf t: $t = \frac{1}{11v} \cdot t$. Einsetzen in die Formel für die Wegberechnung des Achilles ergibt $s = 12v \cdot \frac{1}{11v} = \frac{12}{11}$ Stadien $= 201,\overline{81}$ m.

1.59 *1)* Divergent, da die unendliche Folge arithmetisch (mit d = 0) bzw. geometrisch mit $q = 1 \geqslant 1$ ist.
2) Konvergent, da die unendliche Folge geometrisch mit $q = \frac{1}{2} < 1$ ist.
3) Konvergent, da die unendliche Folge geometrisch mit $q = -\frac{1}{2}$ bzw. $|q| = \frac{1}{2} < 1$ ist.
4) Divergent, da die unendliche Folge arithmetisch ist (d = 2).
5) Divergent, da die unendliche Folge geometrisch mit $q = 1,5 > 1$ ist.
6) Divergent, da die unendliche Folge arithmetisch ist (d = 3).

1.60 *a)* 16 *b)* $\frac{63}{8}$ *c)* Die unendliche Summe existiert nicht, da $q = 1,1 \geqslant 1$. *d)* 0,476...

1.61 *a)* $\frac{10}{33}$ *b)* $\frac{796}{999}$ *c)* $\frac{41}{13}$ *d)* $\frac{62}{13}$

1.62 $b_1 = 5$; $q = 0,8$

1.63 *a) 1)* 1,150... m *2)* 1,154... m *b) 1)* 33,145... cm *2)* 35,355... cm

1.64 *1)* $16,320... \cdot a_1$
2) $17 \cdot a_1$
3) Die Seite a_1 des ersten Quadrats wird im Verhältnis 5 : 12 geteilt, besteht also aus zwei Abschnitten mit der Länge $\frac{5}{17} \cdot a_1$ bzw. $\frac{12}{17} \cdot a_1$. Die Seitenlänge a_2 des zweiten Quadrats berechnet sich mit dem Satz des Pythagoras $a_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{17} \cdot a_1\right)^2 + \left(\frac{12}{17} \cdot a_1\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{289} a_1^2} = \frac{13}{17} \cdot a_1$.
Für das Verhältnis der beiden Quadratflächen gilt daher $A_2 : A_1 = \left(\frac{13}{17} \cdot a_1\right)^2 : a_1^2 = \frac{\frac{169}{289} \cdot a_1^2}{a_1^2} = \frac{169}{289}$.
$A = 2,408... \cdot a_1^2$

1.65 *a) 1)* 314,082... cm *2)* 314,159... cm *b) 1)* 374,045... mm *2)* 376,991... mm

1.66 ***1)*** Falsch. Die einzelnen Strecken bilden eine geometrische Folge mit $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} < 1$. Die Folge ist daher konvergent und die Summe endlich.

2) Richtig. Das Verhältnis von $u_2 : u_1$ ist $q = \frac{\frac{a}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}{a \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Die Gesamtlänge der Umfänge beträgt daher $u = \frac{a}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = a \cdot \pi$.

3) Falsch. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Umfänge ist laut ***2)*** $q_u = \frac{1}{2}$. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Flächeninhalte ist $q_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \pi}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi} = \frac{1}{4}$.

4) Falsch. Der Gesamtflächeninhalt beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2 \cdot \pi}{6}$. Bei geviertelten Strecken beträgt der Gesamtflächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2 \cdot \pi}{6} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot \pi}{6}$.

1.67 ***1)*** 904,778... cm^2 ***2)*** 1 152 cm^2 ***3)*** Die Summe vervierfacht sich in beiden Fällen.

1.68 ***a)*** 74,271... % ***b)*** 50,961... %

1.69 ***1)*** 102,426... cm ***2)*** 10 800 cm^2 ***3)*** $\pi : 3$

1.70 ***a)*** n = 10: 0,645 634..., n = 100: 0,688 172..., n = 1 000: 0,692 647..., TR: 0,693 147...
b) n = 10: 0,760 459..., n = 100: 0,782 898..., n = 1 000: 0,785 148..., TR: 0,785 398...

1.71 ***1)*** Ist a die Seitenlänge des ursprünglichen Dreiecks, so gilt für den ersten Umfang $u_1 = 3 \cdot a$.
Für den zweiten Umfang werden die Seiten gedrittelt und es gilt $u_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{a}{3}$.
Analog gilt für den dritten Umfang $u_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{a}{3 \cdot 3}$.
Für n Schritte kann der Umfang mit $u_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot a$ berechnet werden.
Daraus folgt für den Umfang der Schneeflocke $u = \lim\limits_{n \to \infty} \left(3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot a\right)$.
Dieser Grenzwert ist unendlich. Für die Flächeninhalte gilt
$A_1 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$, $A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{A_1}{9} = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9}\right)$, $A_3 = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9}\right)$ und
$A_n = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + ... + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$, $n > 1$. Für $n \to \infty$ bildet $\frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + ...$ eine unendliche geometrische Reihe mit $b_1 = \frac{3}{9}$ und $q = \frac{4}{9}$ mit der Summe $S = \frac{3}{5}$. Für den Flächeninhalt der Schneeflocke gilt daher $A_n = A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$.

2) Es geht um die Präsentation einer individuellen Recherche.

1.72 Die Hundebesitzerin legt 11 km zurück. Der Hund rennt dreimal so schnell und legt daher 33 km zurück. Unter der vereinfachenden Annahme, dass sich die Richtungswechsel auf die Geschwindigkeit nicht auswirken, ist es unerheblich, dass der Hund dabei ständig zwischen Besitzerin und Hütte hin und her rennt.

1.73 Variante A. Ungefähr 39 Jahre lang erhält man bei Variante B weniger als bei Variante A.

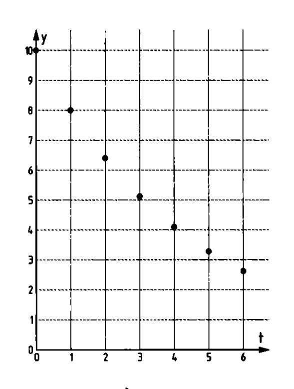
1.76 ***a)*** $y(t) = 4 \cdot t + 2$ ***b)*** $y(t) = 5 \cdot 1{,}1^t$

1.77 ***a)*** $y(t + 1) = 1{,}0225 \cdot y(t)$, exponentielles Wachstum
b) $y(t + 1) = y(t) - 5$ ct, lineares Wachstum
c) $y(t + 1) = 0{,}5 \cdot y(t)$, exponentieller Zerfall

1.78

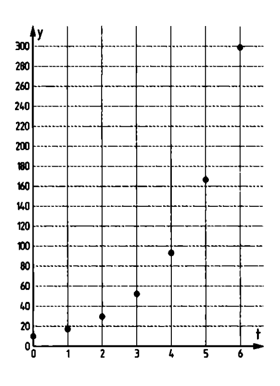
a) 1)

t	y
0	10
1	8
2	6,4
3	5,12
4	4,096
5	3,276...
6	2,621...



2)

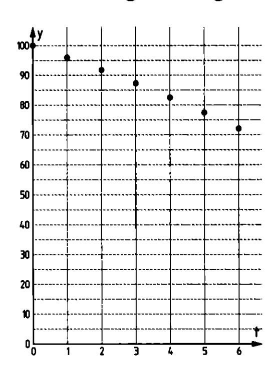
t	y
0	10
1	17
2	29,6
3	52,28
4	93,104
5	166,587...
6	298,856...



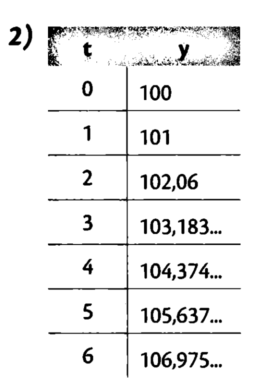
Bei ***1)*** ist die Wachstumsrate kleiner als 1. Die Folge konvergiert gegen null. Bei ***2)*** ist die Wachstumsrate größer als 1. Die Folge divergiert daher.

b) 1)

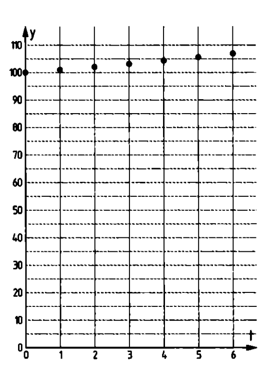
t	y
0	100
1	96
2	91,76
3	87,265...
4	82,501...
5	77,451...
6	72,098...



2)



t	y
0	100
1	101
2	102,06
3	103,183...
4	104,374...
5	105,637...
6	106,975...



Bei ***1)*** ist die Zunahme durch die Wachstumsrate 1,06 geringer als die Abnahme um –10. Die Folgeglieder werden immer kleiner, die Folge divergiert. Bei ***2)*** ist die Zunahme durch die Wachstumsrate 1,06 größer als die Abnahme um –5. Die Folgeglieder werden immer größer, die Folge divergiert.

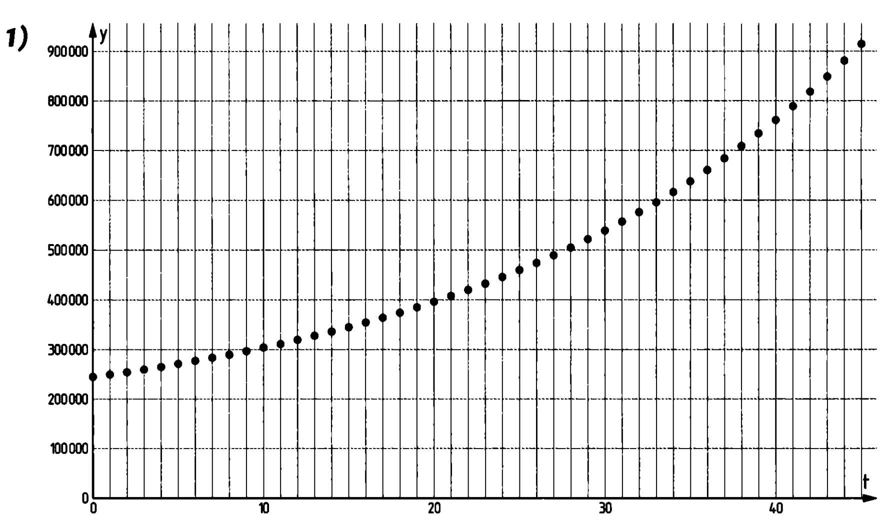
1.79 ***1)*** $y(t + 1) = 1{,}0375 \cdot y(t)$ mit $y_0 = 1000{,}00$ €, $y(t) = 1000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}0375^t$ für einen Zwilling, $y(t + 1) = y(t) + 50{,}00$ € mit $y_0 = 1000{,}00$ €, $y(t) = 1000{,}00\text{ €} + 50{,}00\text{ €} \cdot t$ für den anderen Zwilling.

2) Wird der Betrag auf ein Kapitalsparbuch gelegt, ist die Änderung $\Delta y(t)$ proportional zum angesparten Betrag $y(t)$. Es handelt sich um exponentielles Wachstum. Wird der Betrag jährlich um 50,00 € erhöht, ist die Änderung $\Delta y(t)$ konstant. Es handelt sich um lineares Wachstum.

3) $y(12) \approx 1555{,}45$ € bzw. $y(12) = 1600{,}00$ €, $y(18) \approx 1939{,}93$ € bzw. $y(18) = 1900{,}00$ €
Zum 12. Geburtstag ist das Guthaben bei linearem Wachstum noch etwas größer als das Guthaben bei exponentiellem Wachstum. Zum 18. Geburtstag ist das Guthaben bei exponentiellem Wachstum bereits größer als das Guthaben bei linearem Wachstum.

1.80 ***a)*** 118 Schülerinnen und Schüler ***b)*** 158 Schülerinnen und Schüler

1.81 ***1)***



2) 343 828,18 €

3) Ja.

4) $y(t + 1) = (y(t) - 6\,000{,}00\text{ €}) \cdot 1{,}045$, $y(t) = 245\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}045^t - 6\,000{,}00\text{ €} \cdot 1{,}045 \cdot \frac{1{,}045^t - 1}{1{,}045 - 1}$

(***1)*** bis ***4)*** unter der Annahme, dass am Beginn des Jahres geerbt wird, und sofort 6 000,00 € behoben werden.)

1.82 ***1)*** 2 353 Dosen (2 352,941...) ***2)*** 2 353 Dosen (2 352,941...)

1.83 ***1)*** $y(t + 1) = y(t) \cdot 1{,}5$

2) Die Entwicklung des Fischbestands hängt davon ab, in welcher Fangsaison erstmals 60 Fische entnommen werden. Werden beginnend mit der Fangsaison 2012 jeweils 60 Fische gefangen, ergibt sich für den Fischbestand 2012 90 Fische, für 2013 75 Fische usw. (jeweils am Ende der Fangsaison). Der Fischbestand nimmt ab. Werden zB beginnend mit Fangsaison 2013 jeweils 60 Fische gefangen, ergibt sich für den Fischbestand 2012 150 Fische, für 2013 165 Fische usw. Der Fischbestand nimmt zu.

3) Die Fische vermehren sich von 2011 auf 2012 um 50 Fische. Es können daher beginnend mit der Fangsaison 2012 jeweils 50 Fische gefangen werden, damit der Bestand gleich bleibt.

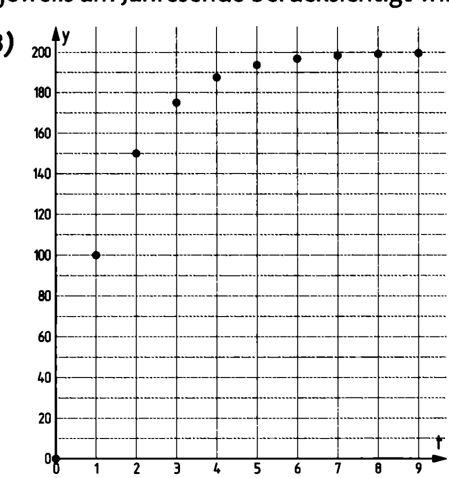
4) $y(t + 1) = 1{,}5 \cdot y(t) - 30$ Fische mit $y_0 = 100$ Fische, $y(t) = 100\text{ Fische} \cdot 1{,}5^t - 30\text{ Fische} \cdot \frac{1{,}5^t - 1}{1{,}5 - 1}$

1.84 4 887 Menschen (4 886,780...)
(Unter der Annahme, dass die Abwanderung jeweils am Jahresende berücksichtigt wird.)

1.85 ***1)*** Beschränktes Wachstum

2) K = 200 Lose, k = 0,5

3)



4) 188 Lose (187,5)

1.86 *1)* Modell 1: $y(t + 1) = y(t) + 75$
Modell 2: $y(t + 1) = 4 \cdot y(t)$
Modell 3: $y(t + 1) = y(t) + \frac{3}{775} \cdot y(t) \cdot (800 - y(t))$

2) Modell 1 | Modell 2 | Modell 3

Modell 1: 9 Monate, Modell 2: 3 Monate (2,403...), Modell 3: 3Monate (ca. 2,5)
Bei exponentiellem Wachstum erreicht die Population am raschesten 700 Feldhamster, bei linearem Wachstum dauert es am längsten.

1.87 1 181 078 535,795... fm (unter der Annahme, dass die jährliche Ernte jeweils am Jahresende abgezogen wird)

1.88 *1)* 1 744,15 € (1 744,146...) *2)* 69,77 € (69,765...)

1.91 *1)* Wird die erste Rate zu Beginn der ersten Verzinsungsperiode bezahlt, spricht man von einer vorschüssigen Ratenzahlung. Wird die erste Rate hingegen am Ende der ersten Verzinsungsperiode bezahlt, spricht man von einer nachschüssigen Ratenzahlung.
2) Für den Endwert einer vorschüssigen Rate gilt
$E = R \cdot q + R \cdot q^2 + \dots + R \cdot q^n = R \cdot q \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$.
Anwenden der Summenformel für endliche geometrische Reihen ergibt $E = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
3) vorschüssig: Pensionszahlungen
nachschüssig: Kreditraten

1.92 *a)* 11 563,12 € *b)* 8 187,10 € *c)* 8 376,82 €

1.93 *a)* 1 847,66 € *b)* 6 900,06 € *c)* 765 028,65 € (25% KESt, Stand 2014)

1.94 *a)* 9 906,65 € (9 906,652...) *c)* 5 098,63 € (5 098,628...)
b) 2 279,35 € (2 279,352...) *d)* 959,26 € (959,257...)

1.95 6 659,05 € (6 659,045...)

1.96 31,375... Monate

1.97 8 Jahre (7,764...)

1.98 12 885,63 € (12 885,632...)

1.99 ***1)*** Uschis Endwert wird mit der Formel $E_v = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ berechnet, Georgs Endwert mit der Formel $E_n = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = E_v \cdot q$. Georgs Endwert ist um den Faktor q=1,04 größer.

2) 2 600,00 €

3) 21 088,33 € (21 088,329...)

1.100 ***1)*** 2 622,35 € (2 622,346...)

Jahr	Saldo zu Jahresbeginn	Zinsen	Zahlung	Tilgung	Restschuld zu Jahresende
1	€ 18 000,00	€ 1 350,00	–€ 2 622,35	–€ 1 272,35	€ 16 727,65
2	€ 16 727,65	€ 1 254,57	–€ 2 622,35	–€ 1 367,78	€ 15 359,87
3	€ 15 359,87	€ 1 151,99	–€ 2 622,35	–€ 1 470,36	€ 13 889,51
4	€ 13 889,51	€ 1 041,71	–€ 2 622,35	–€ 1 580,64	€ 12 308,88
5	€ 12 308,88	€ 923,17	–€ 2 622,35	–€ 1 699,18	€ 10 609,69
6	€10 609,69	€ 795,73	–€ 2 622,35	–€ 1 826,62	€ 8 783,07
7	€ 8 783,07	€ 658,73	–€ 2 622,35	–€ 1 963,62	€ 6 819,45
8	€ 6 819,45	€ 511,46	–€ 2 622,35	–€ 2 110,89	€ 4 708,56
9	€ 4 708,56	€ 353,14	–€ 2 622,35	–€ 2 269,21	€ 2 439,35
10	€ 2 439,35	€ 182,95	–€ 2 622,30	–€ 2 439,35	€ 0,00

2) 2 450,58 € (2 450,576...)

1.101 Die monatliche Kreditrate beträgt 711,18 €. Bei gleichbleibender Miete (unrealistisch) müsste Frau Vogl bei Kauf in den 20 Jahren 14 683,25 € mehr investieren. Steigt der Marktwert der Wohnung in den 20 Jahren um mehr als 14 683,25 €, sollte sie die Wohnung kaufen.

1.102 ***a)*** Die Folgeglieder sind die ersten zehn Ziffern der Zahl π.
b) Die Folgeglieder sind die natürlichen Zahlen von 0 bis 9, alphabetisch geordnet.

1.103 ***a)*** ***1)*** $-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}$
2) nicht monoton
3) $\inf\langle a_n\rangle = -\frac{1}{3}$, $\sup\langle a_n\rangle = 1$

b) ***1)*** 2, –4, 8, –16, 32
2) nicht monoton
3) –

c) ***1)*** $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$
2) streng monoton fallend
3) $\inf\langle a_n\rangle = 0$, $\sup\langle a_n\rangle = 6$

d) ***1)*** 0; 0,693...; 1,098...; 1,386...; 1,609...
2) streng monoton steigend
3) $\inf\langle a_n\rangle = 0$

1.104 ***a)*** ***1)*** 5, 4,8, 4,6, 4,4, 4,2
2) streng monoton fallend
3) $\sup\langle a_n\rangle = 5$

b) ***1)*** 0, 1, 2, 3, 4
2) streng monoton steigend
3) $\inf\langle a_n\rangle = 0$

1.105 ***a)*** – ***b)*** 32 ***c)*** 9

1.106 ***1)*** $g = \sqrt{4} = 2$ ***2)*** $g = \sqrt{2} = 1,414...$
Für $a_1 > 0$ ist der Grenzwert $g = \sqrt{c}$.
Für $a_1 = 0$ ist die Folge nicht definiert.
Für $a_1 < 0$ ist der Grenzwert $g = -\sqrt{c}$.

1.107 ***a)*** 1,098... ***b)*** $\frac{125}{72}$ ***c)*** $\frac{ab^2 + a}{b^2 - a^2 + 1}$

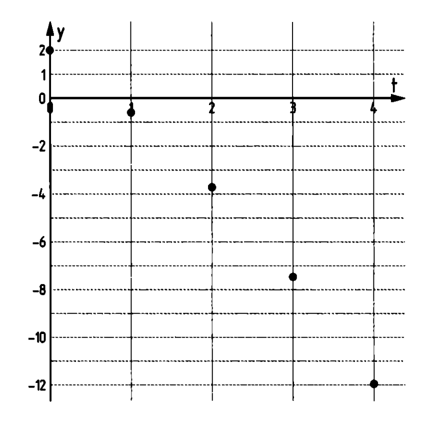
1.108 924,988 16

1.109 Kann der Verpächter die 20 000,00 € des ersten Angebots mit einem jährlichen Zinssatz größer als 6,022... % anlegen, sollte er das erste Angebot annehmen. Der jährlich nachschüssig zur Verfügung stehende Betrag ist unter dieser Voraussetzung höher als bei Annahme des zweiten Angebots.

1.110 Die monatliche Einzahlung betrug 189,08 € (189,080...). Für den Kauf der Küche standen ihm 10 764,06 € (10 764,062...) zur Verfügung.

1.111 ***a)***

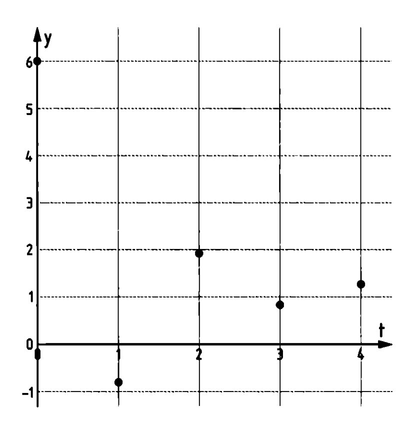
t	y
0	2
1	−0,6
2	−3,72
3	−7,464
4	−11,9568



Die Folge divergiert.

b)

t	y
0	6
1	−0,8
2	1,92
3	0,832
4	1,2672



Die Folge konvergiert.

1.112 ***a)*** 41 724,277... mm^2 ***b)*** 41 887,902... mm^2

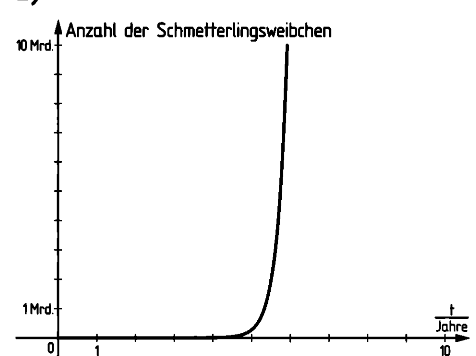
1.113 ***a)*** 123,878... cm ***b)*** 124 cm

1.114 ***a)*** 1,001... · a^2 ***b)*** $\sqrt{3} \cdot a^2$

1.115 ***1)*** $a(t+1) = 51 \cdot a(t)$ mit $a_0 = 1$, $a(t) = 1 \cdot 51^t$

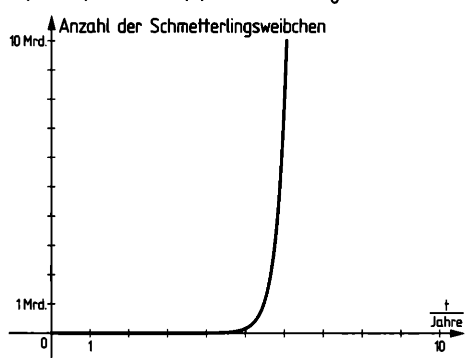


2)



3) 10,056... Jahre

4) $a(t+1) = 51 \cdot a(t) - 25$ mit $a_0 = 1$



1.116 Für den Grenzwert der Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{b_1}{q} \cdot q^n\right) = \frac{b_1}{q} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} q^n$.

1) Für $q > 1$ ist die Folge $\langle q^n \rangle$ streng monoton steigend, da $q^n < q^{n+1} \Rightarrow q^n < q^n \cdot q \Rightarrow 1 < q$ eine wahre Aussage ist. Da jedes Folgeglied um den Faktor q größer als das vorhergehende Glied ist, hat die Folge keine obere Schranke und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$. Die Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ divergiert.

2) Für $q = 1$ ist die Folge $\langle q^n \rangle = \langle 1, 1, 1... \rangle$ konstant. Für den Grenzwert gilt daher $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 1$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{b_1}{q} \cdot q^n\right) = \frac{b_1}{1} \cdot 1 = b_1$. Für $q = 0$ lautet die Folge $\langle b_n \rangle = \langle b_1, 0, 0, 0 ... \rangle$. Außer b_1 sind alle Glieder null und es ist daher $g = 0$.

3) Für $|q| < 1$ werden die Beträge der Folgeglieder der Folge $\langle q^n \rangle$ immer kleiner, aber nie negativ. Die Folge $\langle q^n \rangle$ konvergiert daher gegen null und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{b_1}{q} \cdot q^n\right) = \frac{b_1}{q} \cdot 0 = 0$ bzw. $g = 0$.

1.117 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow 1^3 = 1^2$

3. Schritt: Für den Nachweis wird die Beziehung $2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k = n \cdot (1 + n)$ benötigt, die sich aus der Summenformel für endliche arithmetische Reihen ergibt.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1) \cdot [n \cdot (n+1) + 1 \cdot (n+1)] =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1) \cdot \left(2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

1.118 $0, \frac{7}{11}, \frac{18}{31}, \frac{33}{59}$, monotonically decreasing; $\frac{1}{2}$

1.119 $\frac{9}{2}$

1.120 £ 10 852,51 (10 852,507...)

2 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

2.1 ***1)*** 25 °C

2) Laut dem Funktionsterm wird von 25 °C der Wert des Terms $18\,°C \cdot e^{-\frac{0{,}8t}{h}} = 18\,°C \cdot \frac{1}{e^{\frac{0{,}8t}{h}}}$ subtrahiert.

Der Zahlenwert für die Zeit t ist größer oder gleich null und es gilt daher $e^{\frac{0{,}8t}{h}} \geqslant 1$.

Daraus folgt für den Kehrwert $0 < \frac{1}{e^{\frac{0{,}8t}{h}}} \leqslant 1$.

Der Wert des Terms $18\,°C \cdot e^{-\frac{0{,}8t}{h}}$ muss daher zwischen 0 °C und 18 °C liegen und der Wert des Funktionsterms kann keine größeren Werte als 25 °C annehmen.

2.4 ***a)*** Ja. Für größer werdende x-Werte nähert sich der Graph der Funktion immer mehr der Gerade g.

b) Ja. Die Folge der Funktionswerte der Hochpunkte bzw. die Folge der Funktionswerte der Tiefpunkte der Funktion nähert sich immer mehr der Gerade g.

c) Nein. Der „Abstand" zwischen dem Graph der Funktion und der Gerade g wird für kleiner werdende x-Werte ab $x \approx -5$ immer größer.

2.5 ***a)*** $f(x) = \frac{1}{x}$ ***b)*** $f(x) = e^x$ ***c)*** $f(x) = \frac{1}{x-5}$ ***d)*** $f(x) = e^x - 3$

2.6 ***a)*** $a: y = 0$

b) $a_1: x = \frac{1}{2}$, $k: y = 2x^2 + x$

c) $a_1: x = -\sqrt{2}$, $a_2: x = \sqrt{2}$, $k: x^2 + 2$

d) $a_1: x = 3$, $a_2: y = x + 3$

2.7 ***a)*** $a_1: y = 0$, $a_2: y = 2$, $a_3: x = -0{,}693...$

b) $a: y = 1$

c) $a: y = 3$

d) $a_1: y = -1$, $a_2: y = 1$

2.8 ***1)***

2) $20\,\frac{m}{s}$

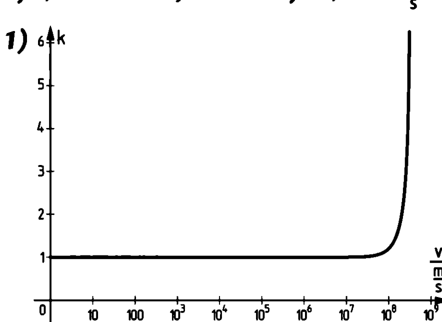
3) Die Geschwindigkeit nimmt vor dem Öffnen des Schirms nicht unbegrenzt zu, der Fallschirmspringer fällt nicht schneller als mit $20\,\frac{m}{s}$.

2.9 ***1)*** $k = \frac{0{,}103...}{h}$ ***2)*** 17:07 Uhr (6,875... Stunden vor Mitternacht)

3) 17,4 °C (die Umgebungstemperatur)

2.10 ***1)*** $5{,}160... \cdot 10^{10}$ Joule ***2)*** $11{,}181...\,\frac{km}{s}$

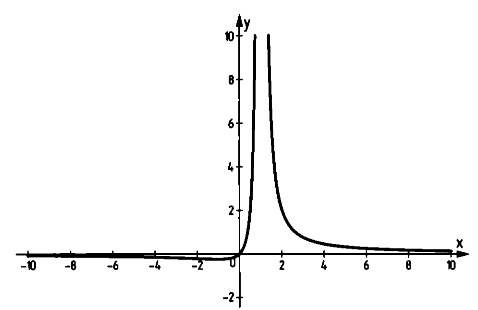
2.11 ***1)***



2) $\lim\limits_{v \to c} m(v) = +\infty$

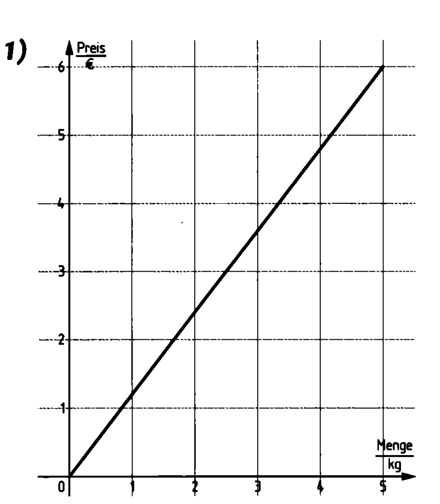
Es ist nicht möglich, mit Lichtgeschwindigkeit zu reisen, da die Masse zu groß wird.

2.12

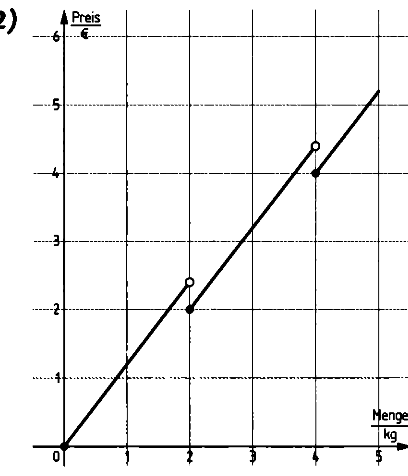


ZB hat die Funktion $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ eine Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.
Für x-Werte kleiner null sind die Funktionswerte negativ, für x-Werte größer null positiv.
An der Stelle $x = 0$ ist der Funktionswert null und die Kurve schneidet die Asymptote.

2.13 ***1)***



2)



2,40 € für 2 kg Orangen

3) In ***1)*** kosten „etwas weniger als 2 kg Orangen" weniger als „genau 2 kg Orangen" bzw. „etwas mehr als 2 kg Orangen" mehr als „genau 2 kg Orangen". in ***2)*** kosten „etwas weniger als 2 kg Orangen" mehr als „genau 2 kg Orangen" bzw. „etwas mehr als 2 kg Orangen" mehr als „genau 2 kg Orangen".

2.14 ***1)*** Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_L = +\infty$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_R = -\infty$.
Der Grenzwert g existiert daher nicht.

2) Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, hat die Folge der Funktionswerte konstant den Wert 0 und daher $g_L = 0$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, hat die Folge der Funktionswerte konstant den Wert 1 und daher $g_R = 1$.
Der Grenzwert g existiert daher nicht.

3) Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_L = 0$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_R = 0$.
Der Grenzwert existiert daher und hat den Wert $g = 0$.

4) Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_L = +\infty$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, wächst die Folge der Funktionswerte gegen $g_R = +\infty$.
Die Funktion hat den uneigentlichen Grenzwert t $+\infty$.

5) Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, hat die Folge der Funktionswerte konstant den Wert 15 und daher $g_L = 15$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, hat die Folge der Funktionswerte ebenfalls konstant den Wert 15 und daher $g_R = 15$.
Der Grenzwert existiert daher und hat den Wert $g = 15$.

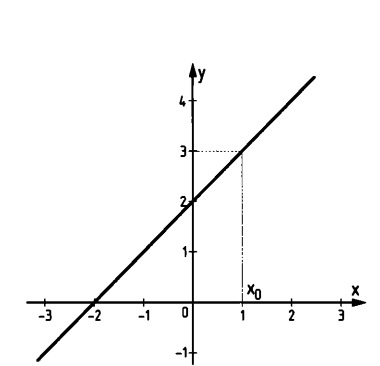
6) Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von links nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_L = 0$.
Für eine Folge von x-Werten, die sich der Stelle $x_0 = 0$ von rechts nähern, nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Wert $g_R = 0$.
Der Grenzwert existiert daher und hat den Wert $g = 0$.

2.15 *a)* linksseitige Näherung, $g = 1{,}5$
b) rechtsseitige Näherung, $g = 0$
c) rechtsseitige Näherung, $g = 0$
d) linksseitige Näherung, $g = 5$

2.16 Der links- und der rechtsseitige Grenzwert sind zwar gleich, beide haben aber den Wert $g_L = g_R = -\infty$. Die Funktion hat daher an der Stelle $x_0 = 0$ einen uneigentlichen Grenzwert.

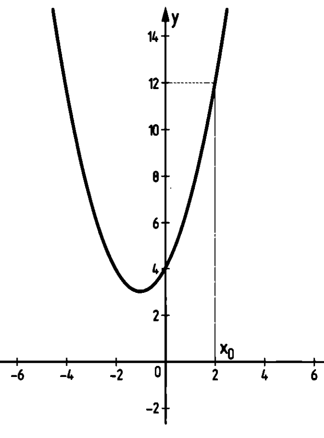
2.17 Der links- bzw. der rechtsseitige Grenzwert von $y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = 1$ und es gilt daher für den Grenzwert $g = 1$.
Der links- bzw. der rechtsseitige Grenzwert von $y_2 = \frac{\cos(x)}{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = +\infty$, die Funktion hat daher den uneigentlichen Grenzwert $g = +\infty$.
Beide Funktionen sind an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert.

2.18 *a)*



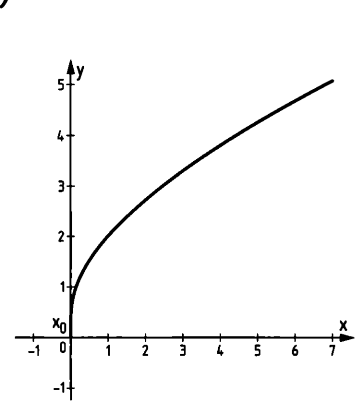
Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ ist $g_L = g_R = 3$.

b)



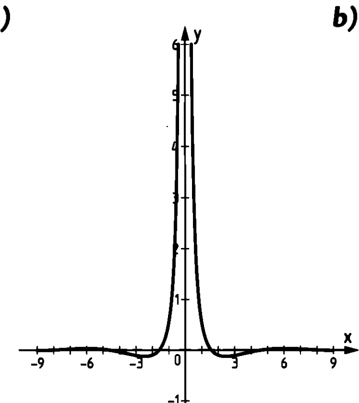
Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ ist $g_L = g_R = 12$.

c)



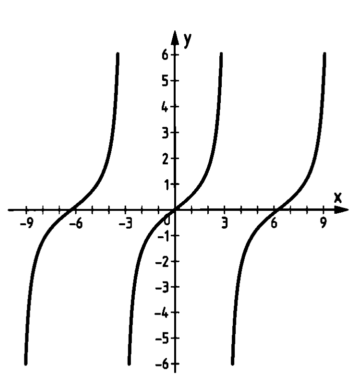
Der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_R = 0$.

2.19 ***a)***



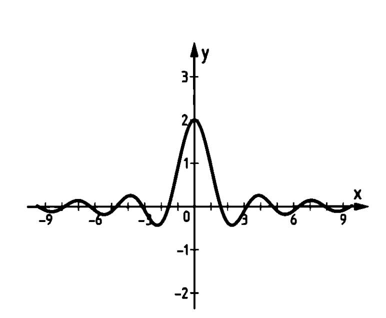
Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = +\infty$.

b)



Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = 0$.

c)



Der linksseitige bzw. der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist $g_L = g_R = 2$.

2.20 ***a)*** Nähert man sich der Stelle x_0 von links, nimmt x immer negative Werte an. Der Exponent $-\frac{1}{x}$ muss daher bei der Berechnung des linksseitigen Grenzwerts immer einen positiven Wert haben und es gilt $g_L = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = „\frac{2}{\infty}“ = 0$.

Nähert man sich der Stelle von rechts, nimmt x immer positive Werte an. Bei der Berechnung des rechtsseitigen Grenzwerts bleibt daher das negative Vorzeichen des Exponenten $-\frac{1}{x}$ erhalten und es gilt $g_R = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = „\frac{2}{1 + 0}“ = 2$.

2.23 ***1)***]−3; −1],]−1; 3[, [3; 4[***2)***]−3; −1[, [−1; 1[, [1; 3[, [3; 4[

2.24 Katharina berechnet den links- bzw. den rechtsseitigen Grenzwert. Da beide null sind, hat die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ den Grenzwert $g = 0$. Daraus zu folgern, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist, ist nicht zulässig. An der Stelle $x_0 = 0$ existiert kein Funktionswert. Die Funktion ist an der Stelle x_0 daher unstetig.

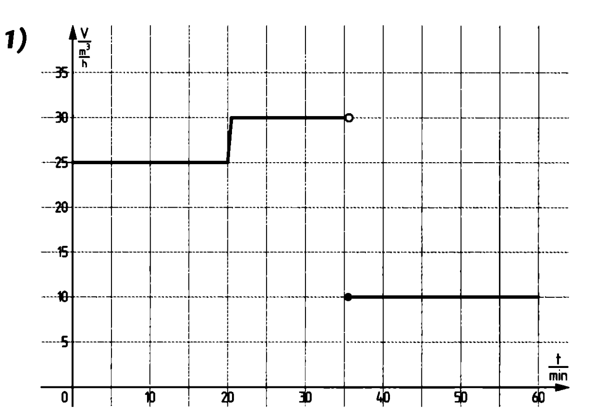
2.25 ***1)*** $0, \frac{T}{5}, \frac{2T}{5}, \ldots, 2T$

$$u(t) = \begin{cases} 6 & 0 \leqslant t < \frac{T}{5} \\ -6 & \frac{T}{5} \leqslant t < \frac{2T}{5} \\ -3 & \frac{2T}{5} \leqslant t < \frac{3T}{5} \\ 0 & \frac{3T}{5} \leqslant t < \frac{4T}{5} \\ 3 & \frac{4T}{5} \leqslant t < T \end{cases}$$

2) keine Unstetigkeitsstelle

$$u(t) = \begin{cases} 1{,}5 \cdot \sin(t) & 0 \leqslant t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leqslant t < T \end{cases}$$

2.26 ***1)***

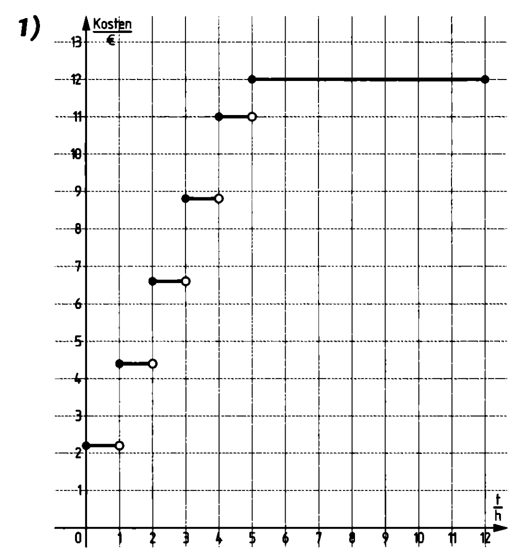


2) $t_0 = 35{,}5$ min

3) 59,125 min

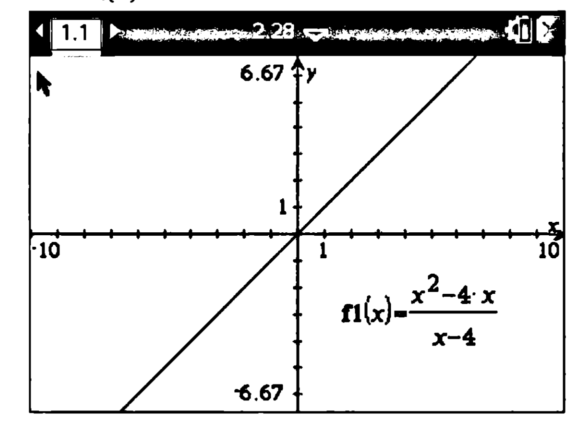
4) Die Füllgeschwindigkeit ist nicht über längere Zeiträume exakt konstant. Die tatsächliche Änderung der Füllgeschwindigkeit erfolgt nicht linear. Auch während abrupter Änderungen verstreicht Zeit.

2.27 ***1)***



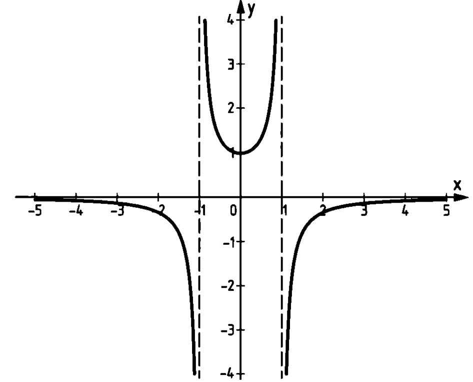
2) Der Graph ist stückweise aus konstanten Funktionen zusammengesetzt. Zu Beginn jeder Stunde wird der Funktionswert abrupt um 2,20 größer. Zu Beginn der 5. Stunde springt der Funktionswert von 11,00 € auf den größten Funktionswert 12,00 €.

2.28 $D = \mathbb{R}\setminus\{4\}$



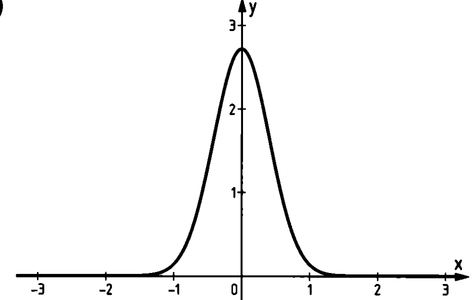
Die Definitionslücke an der Stelle $x = 4$ ist bei der Darstellung der Funktion nicht sichtbar.

2.33 a)



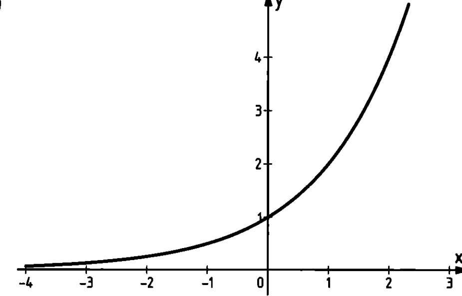
Polstelle bei $x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$.
$g_L = -\infty$ bzw. $g_R = \infty$ bei $x_1 = -1$ und
$g_L = \infty$ bzw. $g_R = -\infty$ bei $x_1 = 1$.

b)



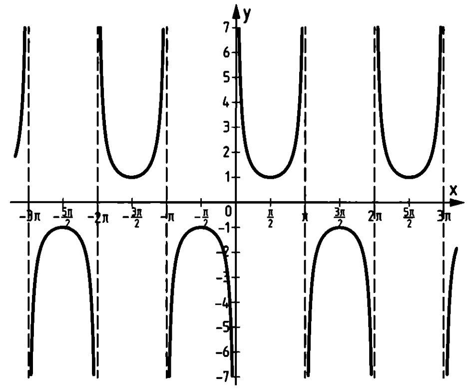
Die Funktion hat keine Unstetigkeitsstellen.
Sie kann ohne abzusetzen gezeichnet werden.

c)



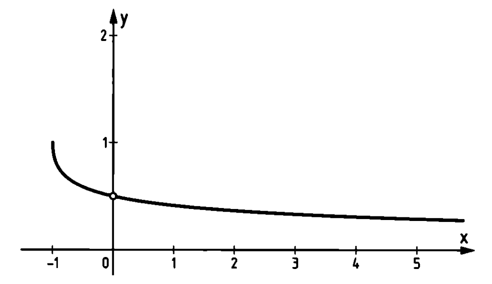
Die Funktion hat keine Unstetigkeitsstellen.
Sie kann ohne abzusetzen gezeichnet werden.

d)



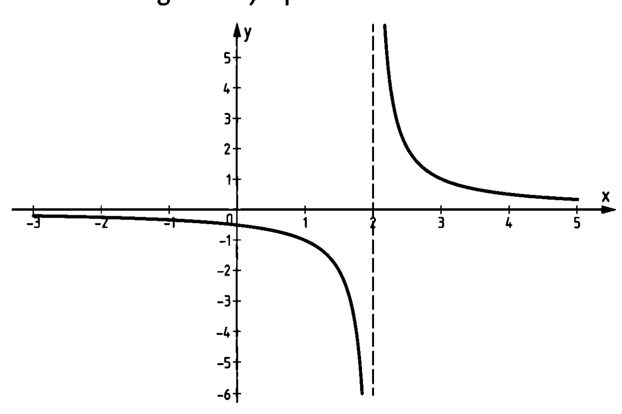
Polstellen bei $x = n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
$g_L = \infty$ bzw. $g_R = -\infty$ bei $x_k = (2k + 1) \cdot \pi$
und $g_L = -\infty$ bzw. $g_R = \infty$ bei $x_m = 2m \cdot \pi$
mit $k, m \in \mathbb{Z}$.

e)



Die Funktion ist für $x < -1$ nicht definiert.
Bei $x = 0$ hat die Funktion eine Definitionslücke.

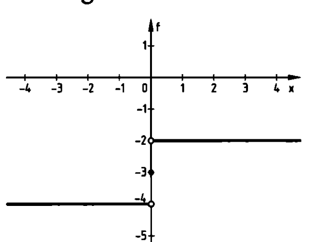
2.34 Bei links- und rechtsseitigem Grenzwert handelt es sich um uneigentliche Grenzwerte, die nicht übereinstimmen.
Der Grenzwert ist daher „nicht definiert". Es handelt sich also um eine Polstelle bei $x_0 = 2$.
Die Gleichung der Asymptote lautet a: $x = 2$.

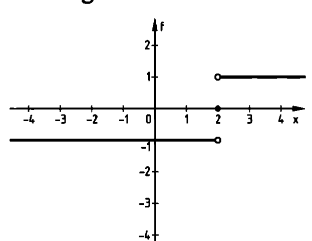


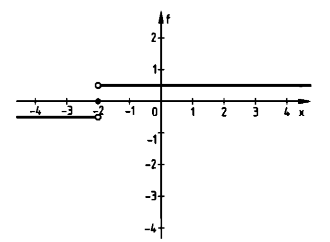
2.35 ***1)*** eine Unstetigkeitsstelle bei $x = 2$
2) Faktorisieren des Zähler- und des Nennerpolynoms ergibt $y = \frac{0{,}5 \cdot (x^2 - 2x + 4) \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 2)}$.

Das Zähler- und das Nennerpolynom haben dieselbe einfache Nullstelle bei $x = -2$.
Die Stelle $x = -2$ ist daher eine hebbare Unstetigkeitsstelle und keine Polstelle.

2.36 ***a)*** Unstetigkeitsstelle: $x = 0$ ***b)*** Unstetigkeitsstelle: $x = 2$ ***c)*** Unstetigkeitsstelle: $x = -2$



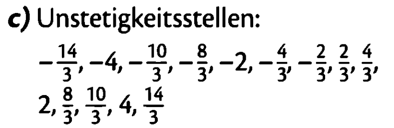




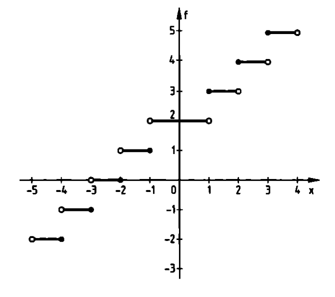
2.37 ***a)*** Unstetigkeitsstellen:
$-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$

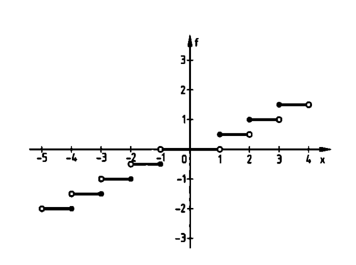
b) Unstetigkeitsstellen:
$-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$

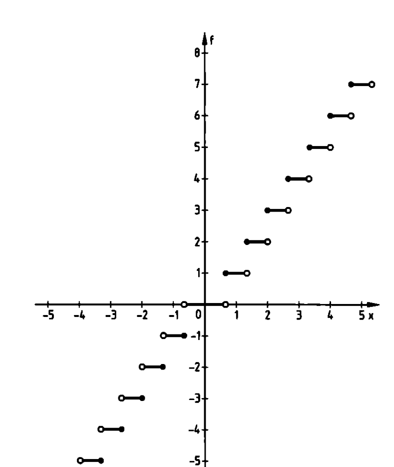
c) Unstetigkeitsstellen:



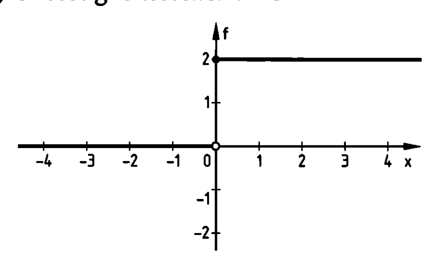
$-\frac{14}{3}, -4, -\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4, \frac{14}{3}$



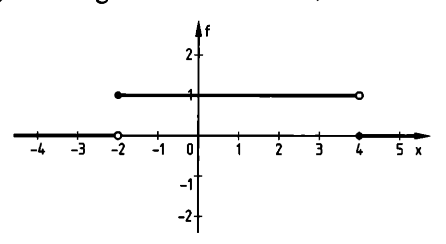




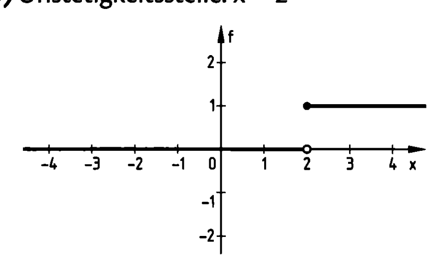
2.38 ***a)*** Unstetigkeitsstelle: $x = 0$



c) Unstetigkeitsstellen: $x = -2$, $x = 4$

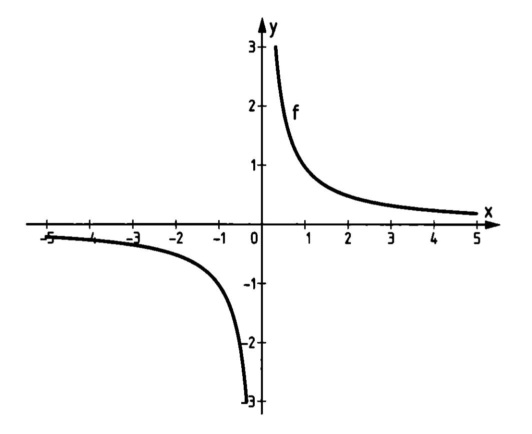


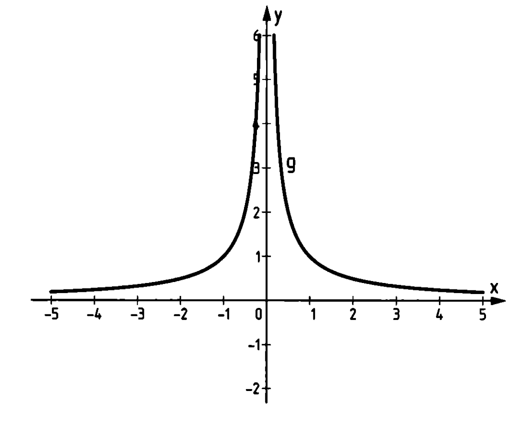
b) Unstetigkeitsstelle: $x = 2$



2.39 Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, da der Funktionswert mit dem links- und dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmend null ist.

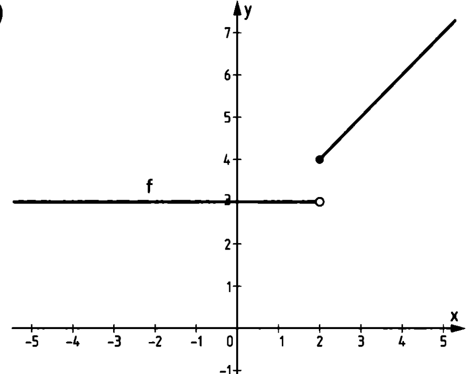
2.40





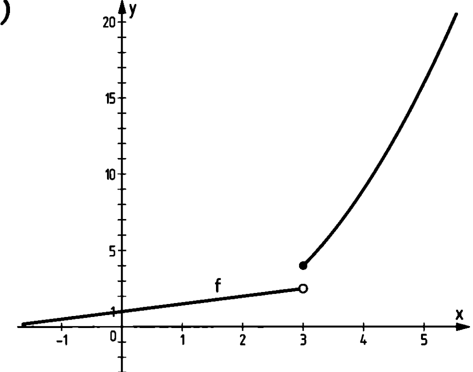
Beide Funktionen nähern sich bei $x \longrightarrow +\infty$ und bei $x \longrightarrow -\infty$ dem Wert null.
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ den linksseitigen Grenzwert $-\infty$ und den rechtsseitigen Grenzwert $+\infty$.
Die Funktion g hat an der Stelle $x = 0$ den links- und rechtsseitigen Grenzwert $+\infty$.

2.41 ***a)***



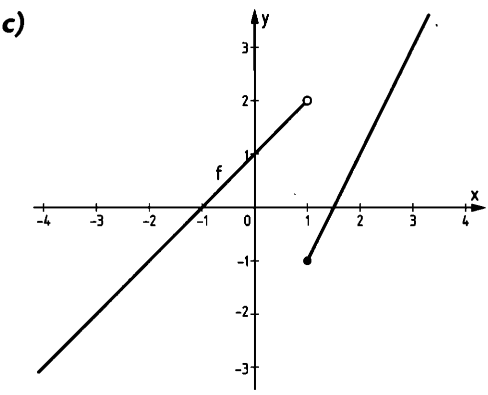
Die Grenzwerte $g_L = 3$ und $g_R = 4$ stimmen nicht überein, daher hat die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ eine Sprungstelle.

b)



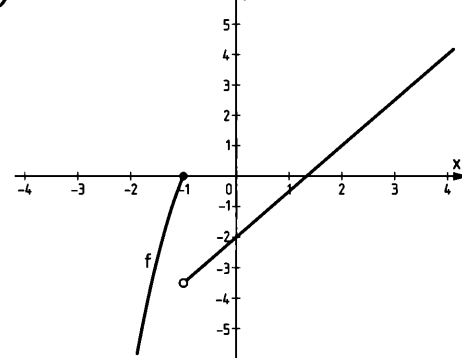
Die Grenzwerte $g_L = 2{,}5$ und $g_R = 4$ stimmen nicht überein, daher hat die Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ eine Sprungstelle.

c)



Die Grenzwerte $g_L = 2$ und $g_R = -1$ stimmen nicht überein, daher hat die Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ eine Sprungstelle.

d)



Die Grenzwerte $g_L = 0$ und $g_R = -3{,}5$ stimmen nicht überein, daher hat die Funktion an der Stelle $x_0 = -1$ eine Sprungstelle.

2.42 ***1)*** Strebt d gegen null, dann strebt R gegen unendlich. Bei $d = 0$ hat die Funktion eine Polstelle.
2) $d > 0$ (Es sind nur positive Durchmesser sinnvoll.)

2.43 ***a), b)*** und ***c)***
Die Funktion hat eine Oszillationsstelle bei $x = 0$. Begründung analog Buch Seite 53.

2.44 ***1)*** Unstetigkeitsstelle bei $x = 0$; $g_L = 0$, $g_R = +\infty$
2) Marko hat recht: Es handelt sich um eine Polstelle, da der rechtsseitige Grenzwert ein uneigentlicher ist.

2.45 ***a)*** D_f: $\mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$

$x_1 = -3$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$, a_1: $x = -3$

$x_2 = 3$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$, a_2: $x = 3$

Beide Definitionslücken sind Polstellen.

b) D_f: $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

$x = 2$: $g_L = g_R = -\infty$, a: $x = 2$

Die Definitionslücke ist eine Polstelle.

c) D_f: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

$t_1 = -\frac{5}{2}$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$, a_1: $t = -\frac{5}{2}$

$t_2 = \frac{5}{2}$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$, a_2: $t = \frac{5}{2}$

Beide Definitionslücken sind Polstellen.

d) D_f: $\mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$

$x_1 = 0$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$, a_1: $x = 0$

$x_2 = 2$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$, a_2: $x = 2$

Beide Definitionslücken sind Polstellen.

2.46 **a)** $\bar{f}(x) = 2x$; $\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 8x}{x - 4} & x \neq 4 \\ 8 & x = 4 \end{cases}$

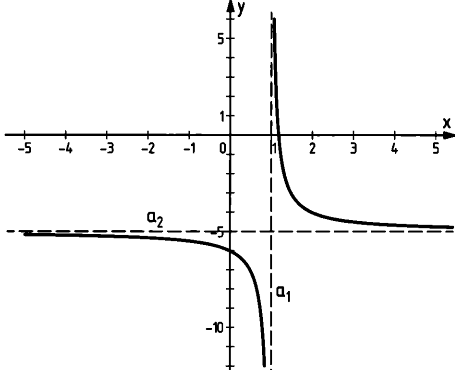
b) nicht hebbare Unstetigkeitsstelle bei $x = 1$

c) $\bar{f}(x) = (x - 1)^2$; $\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2} & x \neq -2 \\ 9 & x = -2 \end{cases}$

d) $\bar{f}(x) = (x + 3)^2$; $\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x^2 - 6x + 9} & x \neq 3 \\ 36 & x = 3 \end{cases}$

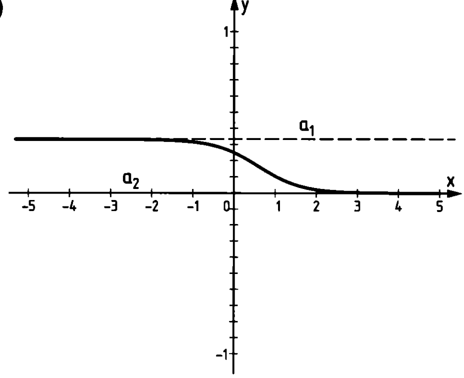
2.47 Das Zählerpolynom und das Nennerpolynom haben eine gemeinsame einfache Nullstelle bei $x = 1$. Die Stelle $x = 1$ ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle.
Durch Kürzen des Terms durch $(x - 1)$ erhält man die stetige Fortsetzung der Funktion $\bar{y} = \frac{1}{x + 1}$.
Diese hat nur eine senkrechte Asymptote a: $x = -1$.

2.48 **a)**



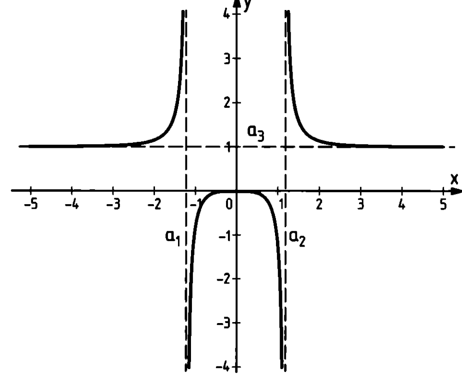
senkrechte Asymptote a_1: $x = 1$
waagrechte Asymptote a_2: $y = -5$

b)



waagrechte Asymptoten a_1: $y = \frac{1}{3}$, a_2: $y = 0$

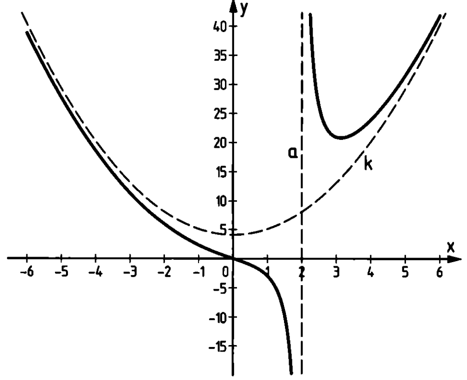
c)



senkrechte Asymptoten a_1: $x = -\sqrt[4]{2}$, a_2: $x = \sqrt[4]{2}$
waagrechte Asymptote a_3: $y = 1$

d)



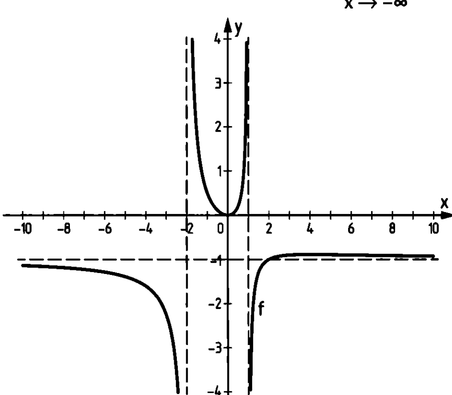


senkrechte Asymptote a: $x = 2$
Grenzkurve k: $y = x^2 + 4$

2.49 ***a)*** $f = 10$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$
b) $v = -330$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$
c) $W = -120$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$
d) $\beta_1 = -1$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$
$\beta_2 = 1$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$

2.50 ***a)*** $f(x) = -\frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

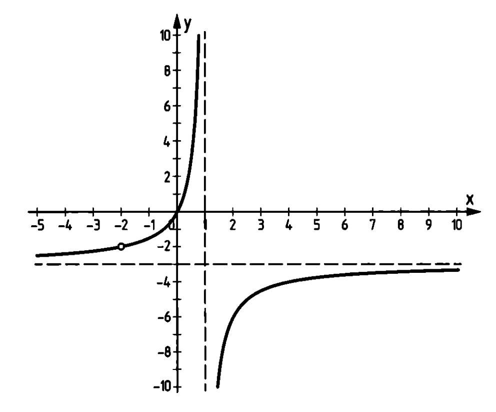
senkrechte Asymptote $x = -2$: $g_L = -\infty$, $g_R = +\infty$
senkrechte Asymptote $x = 1$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$
waagrechte Asymptote $y = -1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$



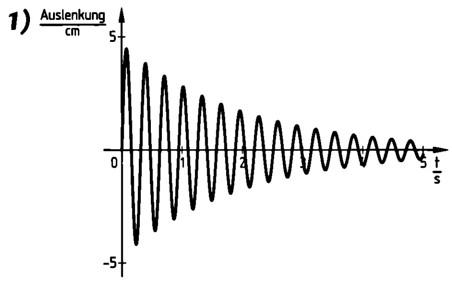
b) $f(x) = -\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + x - 2}$

senkrechte Asymptote $x = 1$: $g_L = +\infty$, $g_R = -\infty$
waagrechte Asymptote $y = -3$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

Definitionslücke bei $x = -2$: $-\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + x - 2} = -\frac{3x \cdot (x + 2)}{(x - 1) \cdot (x + 2)} \Rightarrow$ Zähler- und Nennerpolynom haben bei $x = -2$ eine einfache Nullstelle $\Rightarrow$ hebbare Definitionslücke bei $x = -2$.



2.51 ***1)***



2) $\lim\limits_{t \to \infty} \left(5\,\text{cm} \cdot e^{-\frac{0,5}{s} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{20}{s} \cdot t\right)\right) = 0\,\text{cm}$

2.52 no (jump discontinuity)

2.52 $\lim_{x \to 3} f(x) = -4{,}5$

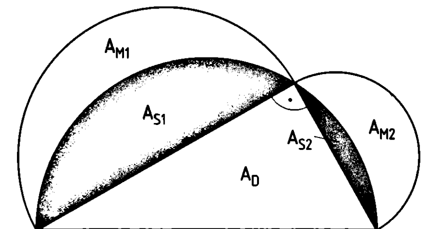
2.54 a_1: $x = -8$, a_2: $y = -1$

2.55 The function is discontinuous at $x_0 = \frac{3}{2}$. The left-sided limit as well as the right-sided limit is improper. Therefore it is an essential discontinuity. The graph is split into two parts at the vertical asymptote.

3 Differentialrechnung

3.1 Durch die in der Abb. 3.1 angegebene Einteilung wird das Quadrat mit der Seitenlänge d in neun Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{d}{3}$ und dem Flächeninhalt $\frac{1}{9} \cdot d^2$ geteilt. Der Flächeninhalt der hellblauen Fläche ergibt sich aus fünf Quadraten und vier Dreiecken. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Flächeninhalt eines halben Quadrats. Für den Flächeninhalt der hellblauen Fläche gilt daher $7 \cdot \frac{1}{9} \cdot d^2 = \frac{7 \cdot 9 \cdot d^2}{9 \cdot 9} = \frac{63 \cdot d^2}{81} \approx \frac{64 \cdot d^2}{81} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$

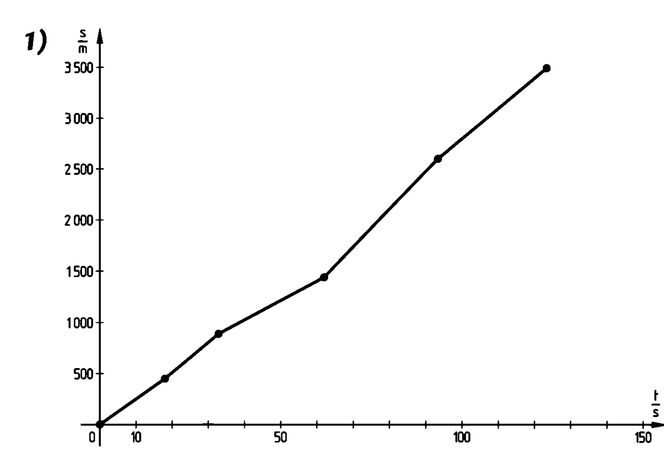
3.2



Der Flächeninhalt des Halbkreises über einer Kathete ist die Summe des Flächeninhalts des Möndchens A_M und des Flächeninhalts des Kreissegments A_S.
Der Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kreissegmente A_{S1} und A_{S2} und des Flächeninhalts des Dreiecks A_D. Nach dem verallgemeinerten Satz von Pythagoras ist der Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Halbkreise über den Katheten und es gilt daher
$(A_{M1} + A_{S1}) + (A_{M2} + A_{S2}) = A_{S1} + A_{S2} + A_D$. Subtraktion der Flächeninhalte der beiden Kreissegmente auf beiden Seiten der Gleichung ergibt die Behauptung $A_{M1} + A_{M2} = A_D$.

3.3 $A \approx 16E^2$

3.4 ***1)***



2) 81,036... $\frac{km}{h}$ bzw. 107,101... $\frac{km}{h}$

3) Eine Momentangeschwindigkeit wird an einer bestimmten Stelle gemessen. Eine mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus einem Streckenteil.

3.6 ***A)*** ist falsch.

3.7 Herr Mann muss die restlichen 1 650 m im Tunnel mit einer Geschwindigkeit von ca. 75 $\frac{km}{h}$ (maximal 75,428... $\frac{km}{h}$) fahren.

3.8 ***a)*** 17,5 $\frac{m}{s}$ ***b)*** 18,23 $\frac{m}{s}$ ***c)*** 8,275 $\frac{m}{s}$ ***d)*** 14,73 $\frac{m}{s}$

3.9 ***a)*** 14,73 $\frac{m}{s}$ ***b)*** 0,5 $\frac{m}{s}$ ***c)*** 4,8 $\frac{m}{s}$ ***d)*** 1,5 $\frac{m}{s}$

3.10 ***1)*** 5,477... s ***2)*** 197,180... $\frac{km}{h}$

3.11 ***1)*** $\overline{v}_1 = 13{,}\dot{3}\,\frac{km}{h}$, $\overline{v}_2 = 0\,\frac{km}{h}$, $\overline{v}_3 = 40\,\frac{km}{h}$

2) 10 $\frac{km}{h}$

3) Weil die zur Berechnung von $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ verwendeten Zeitabschnitte nicht gleich lang sind.

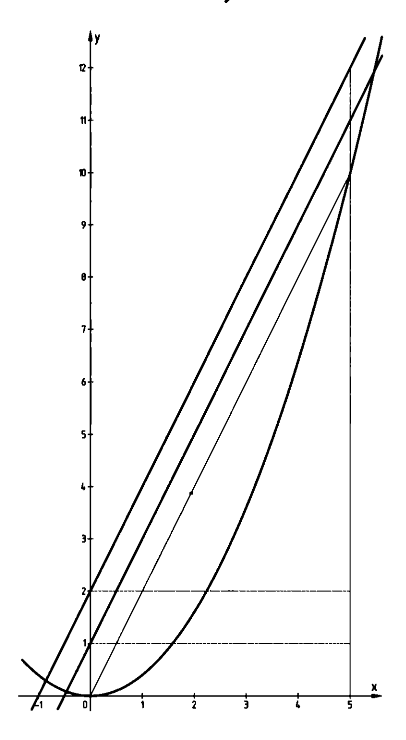
4) Nein. Unmittelbar vor dem Zeitpunkt t = 3 h beträgt die Momentangeschwindigkeit $13{,}\dot{3}\,\frac{km}{h}$, unmittelbar danach 0 $\frac{km}{h}$. Zum Zeitpunkt t = 3 h ändert sie sich laut Abbildung „abrupt" von $13{,}\dot{3}\,\frac{km}{h}$ auf 0 $\frac{km}{h}$. Ein konkreter Zahlenwert kann daher nicht berechnet werden.

5) Für die Zeitpunkte $t_0 = 0$ h, $t_1 = 3$ h und $t_2 = 7$ h. Bei t_0 erhöht sich die Geschwindigkeit von $0\,\frac{km}{h}$ auf $13{,}\dot{3}\,\frac{km}{h}$, bei t_1 verringert sich die Geschwindigkeit von $13{,}\dot{3}\,\frac{km}{h}$ auf $0\,\frac{km}{h}$, bei t_2 erhöht sich die Geschwindigkeit von $0\,\frac{km}{h}$ auf $40\,\frac{km}{h}$. Laut Abbildung erfolgt die Änderung der Geschwindigkeit jeweils so, dass dafür keine Zeit benötigt wird. Das ist nicht realistisch.

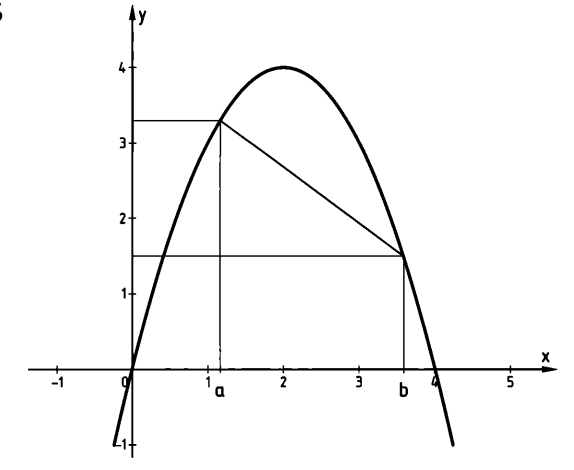
3.12 Kims Aussage ist richtig, falls die dargestellte Gerade eine Tangente an die Kurve an der Stelle t_1 ist. In diesem Fall sind die Steigung der Gerade und die Steigung der Kurve gleich groß.
Robins Aussage ist richtig, da die dargestellte Gerade eine Sekante der Kurve ist. Die Gerade schneidet die Kurve an den Stellen t_1 und t_2. Ihre Steigung gibt daher die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_1; t_2]$ an.

3.13 ***a)*** 61 ***b)*** 4 ***c)*** $-\frac{2}{7}$

3.14

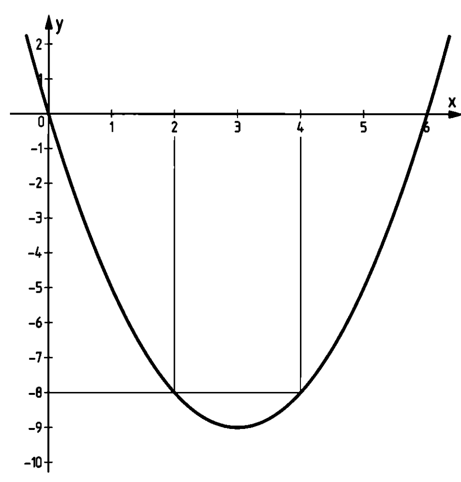


3.15



f(a) muss größer als f(b) sein.

3.16 



Wegen f(2) = f(4) = –8 erhält man für den Differenzquotienten $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{-8 - (-8)}{4 - 2} = 0$.

3.17 ***a)*** 6 ***b)*** –1 ***c)*** 12

3.18 ***a)*** $\dot{s}(t) = at$ ***b)*** $W'(b) = \frac{\pi}{8}hb$ ***c)*** $V'(R) = 4R^2\pi$ ***d)*** $E'(h) = mg$

3.19 ***a)*** $t: y = 0; \alpha = 0°$ ***b)*** $t: y = 2{,}6x + 0{,}3; \alpha = 68{,}962...°$ ***c)*** $t: y = 3x + 5; \alpha = 71{,}565...°$

3.20 ***A)*** Richtig. $T(t_1)$ ist die Temperatur zum Zeitpunkt t_1, $T(t_2)$ ist die Temperatur zum Zeitpunkt t_2. Die angegebene Differenz dieser beiden Werte gibt an, um wie viel sich die Temperatur beginnend mit dem Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 ändert.

B) Falsch. Die mittlere Änderung der Temperatur ist das Verhältnis der Differenz der Temperaturwerte $T(t_2) - T(t_1)$ zur Differenz der Zeitpunkte $t_2 - t_1$.

C) Falsch. Die Berechnung der Abkühlung in der letzten Minute erfolgt durch $T(t_2) - T(t_2 - 1\text{ min})$.

D) Richtig. Das Maß der Abkühlung zu einem bestimmten Zeitpunkt ist die momentane Änderungsrate der Temperaturfunktion, das ist die erste Ableitung $T'(t)$ der Temperaturfunktion.

E) Richtig. T(t) gibt die Temperatur zum Zeitpunkt t an. Wird der Wert für t sehr groß, ist der Funktionswert die Temperatur nach langer Zeit.

F) Δt steht für die Differenz $t_2 - t_1$. $\lim\limits_{t \to \infty}$ ist daher für den Quotient $\frac{\Delta T}{t_2 - t_1}$ nicht sinnvoll.

3.21 ***1)*** der Druck nach 80 Minuten 2 250 hPa beträgt.

2) Änderung des Drucks

3) $\frac{\text{hPa}}{\text{min}}$

4) [0 min; 130 min]

5) $19{,}3\,\frac{\text{hPa}}{\text{min}}$

6) die mittlere Änderungsrate im Intervall [50 min; 60 min]

3.22 $i(t) = -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$

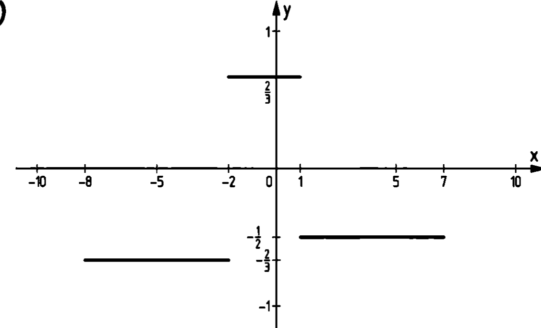
3.23 ***1)*** $-3\,\frac{°\text{C}}{\text{min}}$

2) [1 min; 2 min]

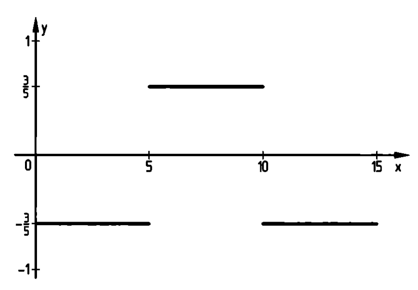
3) Sie gibt an, dass die Temperatur zum Zeitpunkt t = 3 min bezogen auf den Zeitpunkt t = 2 min um ca. 4,1 °C gesunken ist.

4) ca. $-5{,}4\,\frac{°\text{C}}{\text{min}}$

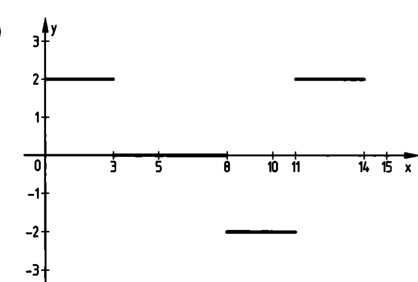
3.25 **a)**



b)



c)



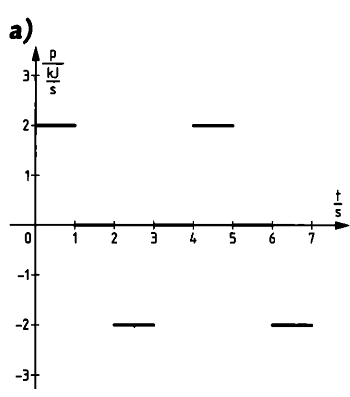
3.26 **a)** $f'(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 1 \\ 1 & 1 < x \leq 6 \end{cases}$

b) $f'(x) = \begin{cases} -1 & -7 \leq x < -6 \\ \frac{1}{2} & -6 < x < 2 \\ 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

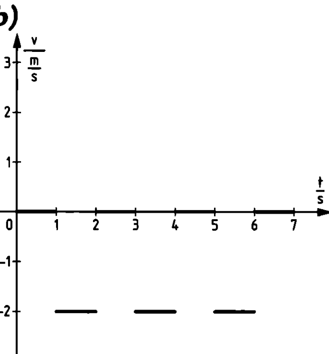
3.27 Nur die mittlere Aussage ist richtig.

3.28 **a)**



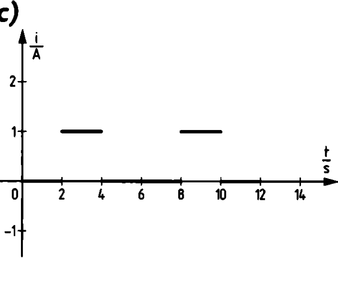
Die Ableitung gibt die Leistung an.

b)



Die Ableitung gibt die Geschwindigkeit an.

c)



Die Ableitung gibt die elektrische Stromstärke an.

3.29 Es sind individuell verschiedene Lösungen möglich.

3.30 1 ⟶ D Die Funktion hat an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle haben.

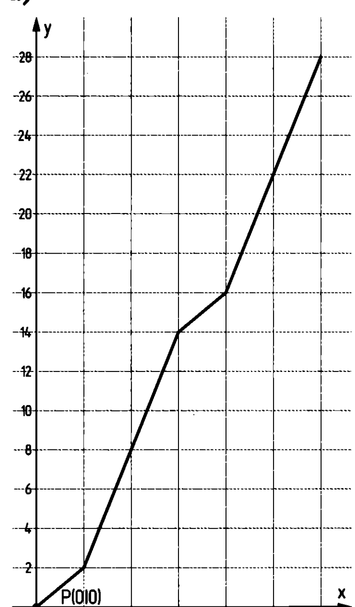
2 ⟶ C Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle haben. Die Funktion ist für Werte $x < 0$ streng monoton fallend. Die Ableitung muss daher für Werte $x < 0$ kleiner als null sein.

3 ⟶ A Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle haben. Die Funktion ist für Werte $x < 0$ streng monoton steigend. Die Ableitung muss daher für Werte $x < 0$ größer als null sein.

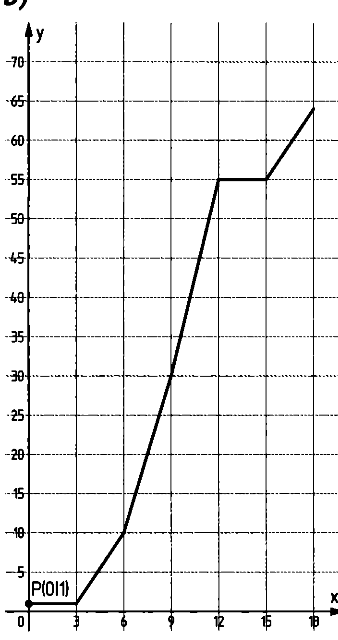
4 ⟶ B Die Funktion hat an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt. Die Ableitung muss daher an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle haben.

3.31 Unendlich viele. Alle Funktionen, deren Steigung konstant 5 ist, haben die Ableitungsfunktion $f'(x) = 5$. Es sind dies alle linearen Funktionen der Form $y = 5 \cdot x + d$, $d \in \mathbb{R}$. Die Funktionen unterscheiden sich durch den y-Achsenabstand d.

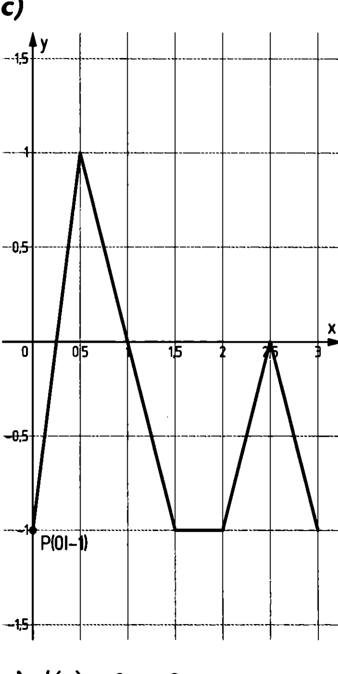
3.32 ***a)***



b)



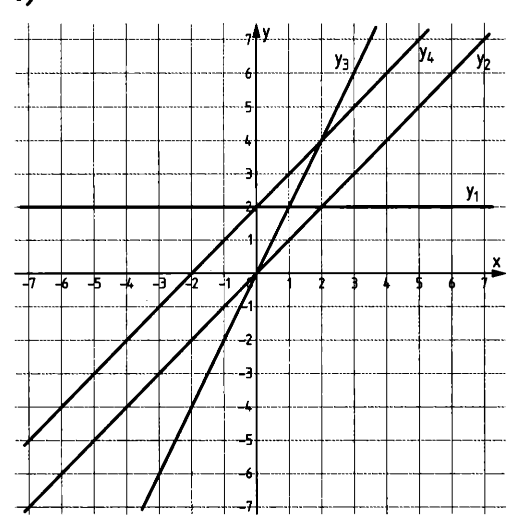
c)



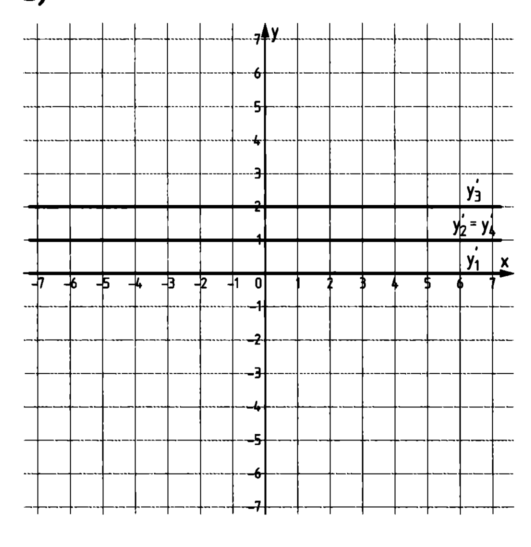
3.33 ***a)*** $y' = 6x - 3$ ***b)*** $f'(x) = -8x$ ***c)*** $g'(x) = 2x - 8$
Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

3.34 ***a)*** $y' = -3x^2 + 5$ ***b)*** $y' = 3x^2 + 4x - 4$ ***c)*** $y' = 3 \cdot (x - 1)^2$
Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

3.35 ***1)***



2)



3) $y_1' = 0$, $y_2' = 1$, $y_3' = 2$, $y_4' = 1$
Die Ableitung der konstanten Funktion ist null. Die Ableitung der linearen Funktion ist die Steigung der linearen Funktion. Die Ableitung eines konstanten Summanden ist null.

3.43 **a)** $y' = 0$ **b)** $\dot{s} = 0$ **c)** $\frac{dv}{dy} = 0$

3.44 **a)** $f'(x) = 4x^3$ **b)** $\frac{dx}{dz} = 3z^2$ **c)** $\dot{v} = 2t$

3.45 **a)** $f'(x) = 69x^2$ **b)** $g'(x) = \frac{3}{5}x^2$ **c)** $y' = 0$

3.46 **a)** $f'(x) = 12x^3$ **b)** $f'(x) = x + 1$ **c)** $f'(x) = 10x^4$

3.47 **a)** $\frac{da}{dz} = 2z$; $\frac{da}{dx} = 0$ **b)** $\frac{dx}{dt} = 0$; $\frac{dx}{dy} = 11y^{10}$ **c)** $\frac{de}{dm} = c^2$; $\frac{de}{dc} = 2 \cdot c \cdot m$

3.48 **a)** $y' = 1$ **b)** $y' = -\frac{7}{x^8}$ **c)** $y' = -\frac{5}{x^6}$ **d)** $y' = -\frac{2}{x^3}$ **e)** $y' = 4x^3$

3.49 **a)** $y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ **b)** $y' = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$ **c)** $y' = -\frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x^7}}$ **d)** $y' = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2}$ **e)** $y' = 0$

3.50 Nur die dritte Aussage ist richtig.

3.51 ***1)*** $y = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}}$ ***3)*** $y = \sqrt{3} \cdot x^1, y' = \sqrt{3}$ ***5)*** $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^1, y' = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $\sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}}$ ***4)*** $y = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{x}}$ ***6)*** $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3x}}$

3.52 **a)** $y' = 12x^2 + 6x - 2$ **b)** $y' = 30x^4 + 21x^2 + 5$ **c)** $y' = 2x^3 + 0{,}5x$

3.53 **a)** $K'(x) = 0{,}03x^2 + 2$ **b)** $F'(s) = 3as^2 + 2bs - c$ **c)** $f'(y) = 4y^5 + y^3 - 5y$

3.54 **a)** $s'(t) = 6t - 5 - \frac{1}{t^2}$ **b)** $v'(t) = \frac{t}{2} - 3 - \frac{2}{t^2}$ **c)** $f'(z) = \frac{3z^2}{a} + \frac{bz}{2} - c - \frac{d}{z^2}$

3.55 **a)** $\frac{dr}{da}$ **b)** $\frac{ds}{db}$ **c)** $\frac{dt}{db}$ **d)** $\frac{du}{db}$

3.56 ***a)*** Da die Funktion vom Grad 4 ist, gibt es vier von null verschiedene Ableitungen.
$y' = 4x^3 - 6x, y'' = 12x^2 - 6, y''' = 24x, y^{(4)} = 24$

b) Da die Funktion vom Grad 6 ist, gibt es sechs von null verschiedene Ableitungen.
$f'(x) = 3x^2 - 6x^5, f''(x) = 6x - 30x^4, f'''(x) = 6 - 120x^3, f^{(4)} = -360x^2, f^{(5)} = -720x, f^{(6)} = -720$

c) Da die Funktion vom Grad 4 ist, gibt es vier von null verschiedene Ableitungen.
$f'(t) = 4t^3 + 12t^2 - 6, f''(t) = 12t^2 + 24t, f'''(t) = 24t + 24, f^{(4)}(t) = 24$

3.57 ***a)*** Vermutung: $y^{(13)} = 0$

$y' = 9x^2$
$y'' = 18x$
$y''' = 18$
$\Rightarrow$ Ab der vierten Ableitung sind alle Ableitungen gleich null.

b) Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = -5x^{-2}$
$y'' = 10x^{-3}$
$y''' = -30x^{-4}$
$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-14}$.

c) Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$
$y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$
$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-\frac{b}{2}}$.

d) Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = -\frac{3}{2}x^{-3}$
$y'' = \frac{9}{2}x^{-4}$
$y''' = -18x^{-5}$
$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-15}$.

e) Vermutung: $y^{(13)} = 0$

$y' = \frac{9}{2}x^2$

$y'' = 9x$

$y''' = 9$

$\Rightarrow$ Ab der vierten Ableitung sind alle Ableitungen gleich null.

f) Vermutung: $y^{(13)} \neq 0$

$y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

$y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

$y''' = \frac{5}{4}x^{-\frac{7}{2}}$

$\Rightarrow y^{(13)}$ hat die Form $a \cdot x^{-\frac{b}{2}}$.

3.58 ***a)*** $\frac{dh}{dr} = 8r + a + \frac{3r^2}{b}$; $\frac{dh}{da} = r$; $\frac{dh}{db} = -\frac{r^3}{b^2}$ ***b)*** $\frac{dS}{dg} = -\frac{f \cdot t}{g^2} + \frac{1}{f \cdot t}$; $\frac{dS}{dt} = \frac{f}{g} - \frac{g}{f \cdot t^2}$; $\frac{d^2s}{ds^2} = \frac{2g}{ft^3}$

3.59 ***a)*** $\frac{dT}{da} = \frac{1}{b \cdot \sqrt{t}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$; $\frac{dT}{dt} = -\frac{a}{2b \cdot \sqrt{t^3}}$; $\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{3a}{4b \cdot \sqrt{t^5}}$

b) $\frac{dX}{da} = t^3 + \frac{s}{a^2 \cdot t} + \frac{t}{2s \cdot \sqrt{a}}$; $\frac{dX}{ds} = -\frac{1}{a \cdot t} - \frac{\sqrt{a} \cdot t}{s^2}$; $\frac{dX}{dt} = 3at^2 + \frac{s}{at^2} + \frac{\sqrt{a}}{s}$

3.60 ***a)*** -8 ***b)*** $\frac{1}{40}$ ***c)*** 4

3.61 ***a)*** $\dot{q}(3) = \frac{136}{9}$ ***b)*** $f'(-3) = \frac{1\,595}{6}$

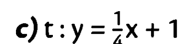
3.62 ***a)*** $3{,}8g$ ***b)*** $-\frac{a}{16b} - 2$ bzw. $\frac{a}{16b} - 2$ ***c)*** $1 + \frac{3}{4}s$

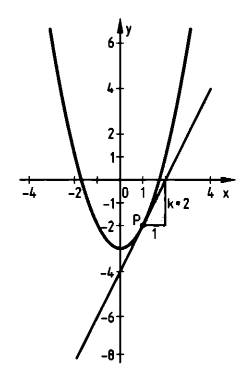
3.63 ***a)*** $x = \frac{11}{4}$ ***b)*** $x_1 = -3{,}055...$; $x_2 = 3{,}055...$ ***c)*** $x = 4$

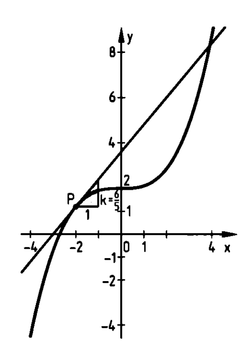
3.64 ***a)*** $P(0{,}5|7{,}25)$ ***b)*** $P_1(-1|2{,}732...)$; $P_2(1|-0{,}732...)$ ***c)*** $P(1{,}000...|3{,}999...)$

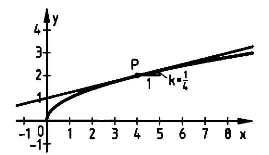
3.65 ***a)*** $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ ***b)*** $x = 0{,}669...$ ***c)*** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

3.66 ***a)*** $t: y = 2x - 4$ ***b)*** $t: y = \frac{6}{5}x + \frac{18}{5}$ ***c)*** $t: y = \frac{1}{4}x + 1$







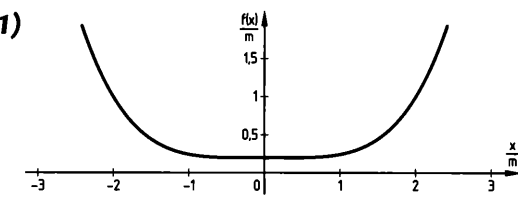


3.67 $1{,}811... \frac{m}{s}$

3.68 ***1)*** $60{,}518... \frac{km}{h}$ ***2)*** $42{,}793... \frac{km}{h}$ ***3)*** $52{,}423...$ m

3.69 ***1)*** $f'(x) = -0{,}2x + 1{,}2$ ***2)*** $39{,}805...°$ bzw $21{,}801...°$ ***3)*** $t_0: y = 1{,}2x$; $t_4: y = 0{,}4x + 1{,}6$

3.70 *1)*



Die Halfpipe ist u-förmig, sie hat am linken und am rechten Rand ein starkes Gefälle. Zur Mitte hin wird sie immer flacher, bis sie schließlich in der Mitte waagrecht verläuft.

2) −66,191…° bzw. 66,191…°

3) $a(t) = 7{,}715 - 11{,}02t \left(a \text{ in } \frac{m}{s^2}\right)$

4) $2{,}700\ldots \frac{m}{s}$, $0 \frac{m}{s^2}$

3.76 **a)** $f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + 5 \cdot \sin(x)$ *b)* $y' = 1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$ *c)* $f'(t) = -3 \cdot \sin(t) - \frac{1}{t^2}$

3.77 **a)** $y' = 4e^x$ *b)* $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) - 3$ *c)* $y'(t) = e^t - e^x$

3.78 **a)** $f'(x) = \frac{5}{x}$ *b)* $y' = 1 + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$ *c)* $y'(t) = \frac{2}{t} - \ln(2)$

3.79 **a)** $y' = 1 - \sinh(x)$ *b)* $f'(x) = e^x - \cosh(x)$ *c)* $y' = 1 + \frac{2}{\cosh^2(x)}$

3.80 **a)** $\frac{dv}{da} = b \cdot a^{b-1}$; $\frac{dv}{db} = a^b \cdot \ln(a)$; $\frac{dv}{dx} = 0$ *b)* $\frac{dz}{d\alpha} = \cos(\alpha)$; $\frac{dz}{dt} = 0$

3.81 **a)** $\frac{dz}{da} = b \cdot a^{b-1} + 2b^2 - 10ab$ *b)* $\frac{df}{dt} = a + a^t \cdot \ln(a)$

$\frac{dz}{db} = a^b \cdot \ln(a) + 4ab - 5a^2$ $\frac{df}{da} = t + t \cdot a^{t-1}$

3.82 *b)* $\frac{dt}{ds} = \frac{y \cdot s^{y-1}}{3} - y^s \cdot \ln(y)$ *d)* $\frac{dY}{d\alpha} = \cos(\alpha) \cdot \sin(t) - \sin(\alpha) \cdot \cos(t)$

$\frac{dt}{dy} = \frac{s^y \cdot \ln(s)}{3} - s \cdot y^{s-1}$ $\frac{dY}{dt} = \sin(\alpha) \cdot \cos(t) - \cos(\alpha) \cdot \sin(t)$

3.83 **a)** $\frac{d^2V}{da^2} = (b^2 - b) \cdot a^{b-2}$, $\frac{d^2V}{db^2} = a^b \cdot \ln^2(a)$, $\frac{d^2V}{dc^2} = 6c$

b) $\frac{d^2X}{dt^2} = -\sin(t) \cdot \cos(\alpha)$, $\frac{d^2X}{d\alpha^2} = -\sin(t) \cdot \cos(\alpha)$

3.84 *A)* $x \cdot z^2$ wurde ohne Malpunkt eingegeben, sin(x) wurde ohne Klammern eingegeben. Das Programm verarbeitet xz bzw. sinx als Formvariablen.

B) Der Malpunkt bei $z \cdot \sin(x)$ wurde nicht eingegeben. Das Programm verarbeitet zsin(x) als abzuleitende Funktion.

C) Die Klammern am Beginn und am Ende des Terms wurden nicht eingegeben. Das Programm berechnet nur vom Term $3x \cdot z^2$ die Ableitung nach x.

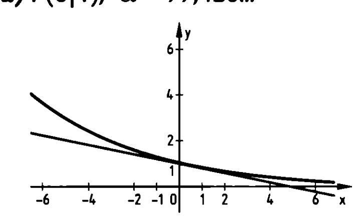
3.85 **a)** nach b *b)* nach a *c)* nach a *d)* nach x

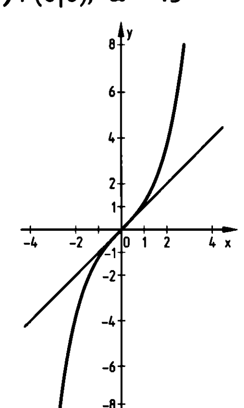
3.86 **a)** 4 *b)* −0,717…

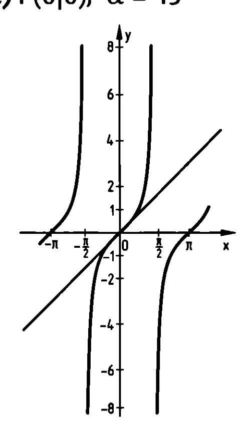
3.87 **a)** 5,545… *b)* 0,434… *c)* $\frac{1}{e}$ *d)* $\frac{1}{e}$

3.88 **a)** $t: y = 1{,}5x - 0{,}920\ldots$ *b)* $t: y = -0{,}707\ldots \cdot t + 1{,}262\ldots$ *c)* $t: y = 0{,}043\ldots \cdot x + 0{,}565\ldots$

3.89 ***a)*** $P(0|1)$; $\alpha = 77{,}420...°$ ***b)*** $P(0|0)$; $\alpha = 45°$ ***c)*** $P(0|0)$; $\alpha = 45°$







3.90 ***a)*** $f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + 5 \cdot \sin(x)$; $f'(0) = 3$; $\alpha = 71{,}565...°$
b) $y'(t) = -\frac{1}{\cos^2(t)}$; $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$; $\alpha = -63{,}434...°$
c) $y' = 2 - \cos(x)$; $y'(0{,}5) \doteq 1{,}122...$; $\alpha = 48{,}301...°$
d) $f'(t) = -\sin(t) - 1$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1{,}866...$; $\alpha = -61{,}813...°$

3.91 ***a)*** $y' = -2e^x$; $y'(0) = -2$; $\alpha = -63{,}434...°$
b) $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(1) = 1$; $\alpha = 45°$
c) $y' = 2 \cdot 0{,}5^x \cdot \ln(0{,}5)$; $y'(2) = -0{,}346...$; $\alpha = -19{,}114...°$

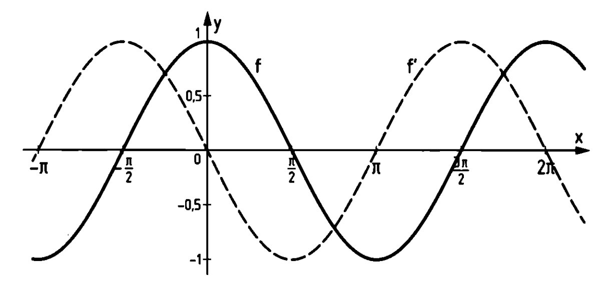
3.92 ***a)*** $t: y = x$ ***b)*** $t: y = 0{,}5x + 1{,}5$ ***c)*** $t: y = -0{,}684...$

3.93 ***a)*** $P(0|0{,}5)$ ***b)*** $P(0{,}531...|-0{,}157...)$ ***c)*** $P(-1{,}506...|1{,}191...)$

3.94 ***a)*** $P_{k_1}(x_{k_1}|0{,}732...)$ mit $x_{k_1} = 1{,}047... + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$
$P_{k2}(x_{k_2}|2{,}732...)$ mit $x_{k_2} = 5{,}235... + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$
b) –
c) $P_{k_1}(x_{k_1}|1{,}632...)$ mit $x_{k_1} = 0{,}901... + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$
$P_{k_2}(x_{k_2}|0{,}642...)$ mit $x_{k_2} = 5{,}663... + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

3.95 ***a)*** ... $P_1\left(\frac{\pi}{2}\middle|2{,}5\right)$, $P_2\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-0{,}5\right)$, $P_3\left(\frac{5\pi}{2}\middle|2{,}5\right)$, $P_4\left(\frac{7\pi}{2}\middle|-0{,}5\right)$ ...
b) ... $P_1(0|1)$, $P_2(\pi|5)$, $P_3(2\pi|1)$, $P_4(3\pi|5)$ ...
c) ... $P_1\left(\frac{\pi}{4}\middle|\sqrt{2}\right)$, $P_2\left(\frac{5\pi}{4}\middle|-\sqrt{2}\right)$, $P_3\left(\frac{9\pi}{4}\middle|\sqrt{2}\right)$, $P_4\left(\frac{13\pi}{4}\middle|-\sqrt{2}\right)$ ...

3.96



Grafisches Differenzieren in einzelnen Punkten der Sinuskurve ergibt die Punkte und Tangenten der Cosinuskurve.

3.97 ***a)*** 3-mal ***b)*** 2-mal ***c)*** 4-mal ***d)*** 3-mal

3.98 ***1)*** $y_1' = 2x$, $y_2' = 3x^2$, $y_3' = 5x^4$ ***2)*** $y_1' \cdot y_2' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \neq 5x^4 = y_3'$

3.100 ***1)*** y hat die Form $a \cdot f(x)$ mit $a = 2$ und $f(x) = \sin(x)$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
2) y hat die Form $f(x) \cdot a$ mit $f(x) = x$ und $a = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
3) y hat die Form $u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x$ und $v(x) = \cos(x)$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.
4) y hat die Form $f(x) \cdot a$ mit $f(x) = x$ und $a = e^2$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.

3.101 ***1)*** y hat die Form $u(b) \cdot v(b)$ mit $u(b) = b$ und $v(b) = \frac{b}{4}$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.
2) y hat die Form $c \cdot f(a)$ mit $c = \ln(2) \cdot 3$ und $f(a) = a^3$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet. Die Produktregel ist nicht notwendig.
3) y hat die Form $u(t) \cdot v(t)$ mit $u(t) = t^2$ und $v(t) = \sin(t)$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.
4) y hat die Form $u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = e^x$ und $v(x) = \sin(x)$.
Zur Ableitung wird die Produktregel benötigt.

3.102 ***a)*** $y' = 50x^4 - 90x^2$ ***b)*** $y' = 20x^4 + 12x^2 - 12x$ ***c)*** $y' = 135x^2 + 36x - 15$

3.103 ***a)*** $y' = 2 \cdot \cos(x) - 2x \cdot \sin(x)$ ***c)*** $y' = 3x^4 \cdot \cos(x) + 12x^3 \cdot \sin(x)$
b) $y' = 4x^3 \cdot \cos(x) + 12x^2 \cdot \sin(x)$ ***d)*** $y' = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$

3.104 ***a)*** $y' = -2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ ***c)*** $y' = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
b) $y' = \frac{2 \cdot \sin(x)}{\cos^3(x)}$ ***d)*** $y' = 2 \cdot \cos(x)$

3.105 ***a)*** $f'(t) = 7t \cdot e^t + 7e^t$ ***c)*** $f'(t) = t^2 \cdot e^t + 2t \cdot e^t$
b) $f'(t) = t^4 \cdot e^t + 4t^3 \cdot e^t$ ***d)*** $f'(t) = 2 \cdot \ln(2) \cdot t^3 \cdot e^t + 6 \cdot \ln(2) \cdot t^2 \cdot e^t$

3.106 ***a)*** $f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2$ ***c)*** $f'(x) = \ln(x) \cdot \cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}$
b) $f'(x) = \lg(x) + \frac{1}{\ln(10)}$ ***d)*** $f'(t) = 3e^t \cdot \ln(t) + \frac{3e^t}{t}$

3.107 ***A)*** $y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - 2) \longrightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot (2x^2 - 2) + \sqrt{x} \cdot 4x$
Es wurde die Produktregel verwendet.
B) $y = 2x^2 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt{x} \longrightarrow y' = 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{x} + 2x^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = 4x \cdot \sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
Die Klammern wurden aufgelöst und anschließend der erste Summand mit der Produktregel und der zweite Summand mit der Faktorregel abgeleitet.
C) $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y' = 5x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$

Die Klammern wurden aufgelöst und beide Summanden als Potenz angeschrieben. Anschließend wurden beide Summanden mit der Regel für das Ableiten von Potenzfunktionen abgeleitet.

3.108 ***a)*** $f'(x) = -x \cdot e^x + 2e^x$ ***b)*** $f'(t) = \frac{R}{L} \cdot (1 - e^t - t \cdot e^t)$ ***c)*** $y' = 5x \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 5 \cdot 2^x$

3.109 ***a)*** $y' = \ln(5) \cdot x^2 \cdot 5^x + 2x \cdot 5^x + 3 \cdot \ln(5) \cdot 5^x$ ***c)*** $y' = \ln(2) \cdot e^x \cdot 2^x + e^x \cdot 2^x - \ln(2) \cdot 2x + e^x$
b) $y' = \frac{32x^3 + 10x \cdot \sin(x) - 2 \cdot \cos(x)}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$

3.110 ***a)*** $f'(x) = -x^2 \cdot \sin^2(x) + x^2 \cdot \cos^2(x) + 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ ***c)*** $f'(t) = 2^t \cdot t \cdot \ln(t) \cdot \ln(2) + 2^t \cdot \ln(t) + 2^t$

b) $y' = \sqrt{x^5} \cdot e^x + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^3} \cdot e^x + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot e^x + \frac{3e^x}{2 \cdot \sqrt{x}}$

3.111 ***a)*** $f'(x) = 2x^3 \cdot e^x + 10x^2 \cdot e^x + 8x \cdot e^x$ ***c)*** $f'(t) = t \cdot e^t \cdot \ln(t) - t \cdot e^t + e^t \cdot \ln(t) + \ln(t)$

b) $y' = 10x^4 \cdot \cos(x) - 6x^2 \cdot \cos(x) - 2x^5 \cdot \sin(x) + 2x^3 \cdot \sin(x)$

3.114 ***1)*** Wegen $y = 2 \cdot x^{-1}$ hat y die Form $a \cdot f(x)$ mit $a = 2$ und $f(x) = x^{-1}$.
Zur Ableitung wird die Faktorregel verwendet.
Die Anwendung der Quotientenregel ist nicht notwendig, aber möglich ($u(x) = 2$, $v(x) = x$).

2) y hat die Form $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = x + 1$ und $v(x) = x - 1$.
Zur Ableitung muss die Quotientenregel verwendet werden.

3) Lässt man den Bruchterm unverändert, so hat y die Form $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = x^2 + 4$ und $v(x) = x$.
Zur Ableitung muss die Quotientenregel verwendet werden.
Formt man den Bruchterm um auf $y = x + \frac{4}{x}$, so wird zur Ableitung die Summen- und die Faktorregel verwendet, und die Quotientenregel ist nicht notwendig.

4) Wegen $y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$ hat y die Form $a \cdot f(x) + c$ mit $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = x$ und $c = \frac{3}{2}$.
Zur Ableitung wird die Summenregel und die Faktorregel verwendet. Die Anwendung der Quotientenregel ist nicht notwendig, aber möglich ($u(x) = x + 3$, $v(x) = 2$).

5) y hat die Form $\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = 2$ und $v(x) = x + 2$.
Zur Ableitung muss die Quotientenregel verwendet werden.

3.115 ***a)*** $f'(x) = \frac{8x^3 + 6x^2}{4x^2 + 4x + 1}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{2x^3 - 15x^2 + 1}{x^6 - 2x^3 + 1}$ ***c)*** $y' = \frac{-12x^2 - 8x + 3}{16x^4 + 8x^2 + 1}$

3.116 ***a)*** $f'(x) = \frac{-4x^3 - 14}{x^6 - 14x^3 + 49}$ ***b)*** $y' = \frac{-2x^4 + 10x^3 - 12x + 15}{x^6 - 6x^3 + 9}$ ***c)*** $f'(x) = \frac{x^4 - 21x^2 + 70x}{x^4 - 14x^2 + 49}$

3.117 ***a)*** $y' = \frac{-2x^5 + 10x^4}{e^x}$ ***b)*** $y' = -\frac{3e^x}{4e^{2x} - 4e^x + 1}$ ***c)*** $f'(x) = \frac{-x^2 + x^2 \cdot e^x - x \cdot e^x - e^x}{x^4 - 2x^2e^x + e^{2x}}$

3.118 ***a)*** $y' = \frac{1 - \ln(x)}{2x^2}$ ***b)*** $y' = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$ ***c)*** $y' = \frac{6 \cdot \ln(x) - 7}{x^7}$

3.119 ***a) 1)*** $y' = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

2) $y' = (x^{-1} \cdot \sin(x))' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x) + x^{-1} \cdot \cos(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x} = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

b) 1) $f'(t) = \frac{-\sin(t) \cdot t^2 - 2t \cdot \cos(t)}{t^4} = -\frac{t \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t)}{t^3}$

2) $f'(t) = (t^{-2} \cdot \cos(t))' = -2t^{-3} \cdot \cos(t) + t^{-2} \cdot (-\sin(t)) = -\frac{2 \cdot \cos(t)}{t^3} - \frac{\sin(t)}{t^2} = -\frac{t \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t)}{t^3}$

3.120 ***a)*** Die Ableitung des Nenners ist nicht eins sondern null.
Die Ableitung müsste richtig lauten $y' = \frac{4 - x \cdot 0}{16} = \frac{1}{4}$.

b) Im Zähler der Ableitung muss anstelle der Summe eine Differenz stehen, da in der Formel zur Quotientenregel die beiden Produkte im Zähler voneinander subtrahiert werden.

3.121 ***a)*** $y' = \frac{3x^2 \cdot \cos(x) + x^3 \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)}$ ***c)*** $y'(t) = \frac{-\cos(t) - t \cdot \sin(t) + 1}{\cos^2(t)}$

3.122 ***a)*** $y' = -\frac{\sin^3(x) + \cos^3(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}$ ***b)*** $f'(t) = \frac{t^4 \cdot \cos(t) - t^2 - 2t \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)}{t^4 - 2t^2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t)}$ ***c)*** $y' = \frac{\sin^3(x) + \cos^3(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}$

3.123 ***1)*** 3 ist ein Faktor und $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ ist eine Potenzfunktion.
Es sind die Faktorregel und die Ableitungsregel für Potenzfunktionen anzuwenden.

2) 4 ist ein Faktor und $\sin(x)$ ist eine Winkelfunktion.
Es sind die Faktorregel und die Ableitungsregel für Winkelfunktionen anzuwenden.

3) t^2 ist eine Potenzfunktion und $\frac{1}{\sin(x)}$ ist ein Faktor.
Es sind die Ableitungsregel für Potenzfunktionen und die Faktorregel anzuwenden.

4) 2 ist ein Faktor und $\frac{e^x}{\ln(x)}$ ist ein Quotient.

Es sind die Faktorregel, die Quotientenregel und die Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen anzuwenden.

5) $e^t \cdot \frac{1}{t^3} = \frac{e^t}{t^3}$ ist ein Quotient.

Es sind die Quotientenregel und die Ableitungsregeln für Exponential- und Potenzfunktionen anzuwenden.

3.124 ***a)*** $\frac{dz}{da} = \frac{b^2 - r}{a^2 + 2ab + b^2}$, $\frac{dz}{db} = \frac{a^2 - r}{a^2 + 2ab + b^2}$, $\frac{dz}{dr} = \frac{1}{a + b}$ ***b)*** $\frac{dx}{dr} = s + \frac{r^2 - 2rs - s^2}{r^2 + 2rs + s^2}$, $\frac{dx}{ds} = r + \frac{2r^2}{r^2 - 2rs + s^2}$

3.131 e^{2x} besteht aus der äußeren Funktion e^z und der inneren Funktion 2x. Es ist daher die Kettenregel anzuwenden und die Ableitung lautet $2e^{2x}$. Die Schlussfolgerung von Ines ist falsch.

3.132

	a)	b)	c)
äußere Funktion	sin(z)	$\sqrt{z}$	ln(z)
innere Funktion	4x	2y – 1	3t – 1

3.133

	a)	b)	c)
äußere Funktion	$\frac{1}{z}$	$z_1^{\,2}$	e^z
innere Funktion(en)	$x^2 + 5$	$\cos(z_3)$ y – 3	$-\frac{1}{t}$

3.134 ***a)*** $f'(x) = 6x^2 + 36x + 54$ ***b)*** $f'(x) = 8x - 4$ ***c)*** $f'(x) = -96x^2 + 480x - 600$

3.135 ***a)*** $f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 34x + 24$ ***c)*** $f'(x) = 2\,268x^{27} - 2\,376x^{21} + 864x^{15} - 120x^9 + 4x^3$
b) $f'(x) = 750x^5 - 600x^3 + 120x$

3.136 ***a)*** $f'(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - x}}$ ***b)*** $y' = \frac{2 - 24x^7}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 3x^8)^2}}$ ***c)*** $f'(x) = \frac{3 - 12x^7}{2 \cdot \sqrt[4]{2x - x^8}}$

3.137 ***a)*** $f'(x) = -3 \cdot \sin(3x)$ ***b)*** $y' = 10 \cdot \cos(2x)$ ***c)*** $f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

3.138 ***a)*** $y' = 4x^3 \cdot \cos(x^4)$ ***b)*** $f'(x) = -35x^4 \cdot \sin(7x^5 - 1)$ ***c)*** $y' = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}}$

3.139 ***a)*** $y' = -3 \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(x)$ ***b)*** $f'(x) = 5 \cdot \sin^4(x) \cdot \cos(x)$ ***c)*** $y' = \frac{2 \cdot \tan(x)}{\cos^2(x)}$

3.140 ***a)*** $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{2 \cdot \sqrt{\cos(x)}}$ ***b)*** $y' = \frac{\cos(x)}{4 \cdot \sqrt[4]{\sin^3(x)}}$ ***c)*** $y' = -\frac{4 \cdot \sin(x)}{5 \cdot \sqrt[5]{\cos(x)}}$

3.141 ***a)*** $y' = 4e^{4x + 2}$ ***b)*** $y' = \frac{1}{8}e^{\frac{x}{8}}$ ***c)*** $f'(x) = -4e^{-4x}$

3.142 ***a)*** $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ ***b)*** $y' = \frac{2e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}$ ***c)*** $f'(x) = -\frac{4e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

3.143 ***a)*** $y' = \frac{2x}{\ln(10) \cdot x^2 + \ln(10)}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{2}{2x + 9}$ ***c)*** $y' = \frac{7}{\ln(10) \cdot x}$

3.144 ***a)*** $f'(x) = \frac{4}{1 - x^2}$ ***b)*** $y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} + 2x}$ ***c)*** $f'(x) = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(x) + 1}}$

3.145 ***a)*** $f'(x) = -e^x \cdot \sin(e^x)$ ***b)*** $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x \cdot \cos(3^x)$ ***c)*** $y' = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$

3.146 ***1)*** $y' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; äußere Funktion e^x, innere Funktion $\frac{1}{x}$, ableiten durch Anwendung der Kettenregel

2) $y' = \frac{1 - x}{e^x}$; Potenzfunktion x im Zähler, Exponentialfunktion e^x im Nenner, ableiten durch Anwendung der Quotientenregel

3) $y' = \frac{1}{e^x}$; Faktor −1 im Zähler, Exponentialfunktion e^x im Nenner, ableiten durch Anwendung der Ableitungsregel für Exponentialfunktionen

3.147 **1)** $y' = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$; äußere Funktion $z^2 + 1$, innere Funktion $\sin(x)$
2) $y' = 2x \cdot \cos(x^2)$; äußere Funktion $\sin(z) + 1$, innere Funktion x^2
3) $y' = 2 \cdot \sin(x+1) \cdot \cos(x+1)$; miteinander verkettet sind die Funktionen z_1^2, $\sin(z_2)$ und $x + 1$
Innere und äußere Ableitungen sind wegen der unterschiedlich gesetzten Klammern jeweils verschieden.

3.148 **1)** $y' = -4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)$; miteinander verkettet sind die Funktionen $z_1^2 + 4$, $\cos(z_2)$ und $2x$
2) $y' = -4 \cdot \sin(2x + 4) \cdot \cos(2x + 4)$; miteinander verkettet sind die Funktionen $\cos(z_1)$, z_2^2 und $2x + 4$
3) $y' = -(8x + 16) \cdot \sin((2x + 4)^2)$; miteinander verkettet sind die Funktionen $\cos(z_1)$, z_2^2 und $2x + 4$
Innere und äußere Ableitungen sind wegen der unterschiedlich gesetzten Klammern jeweils verschieden.

3.149 **A)** Richtig.
B) Die Ableitung der inneren Funktion $x^2 + y$ ergibt $2x$ und nicht x.

3.150 **A)** Die Ableitung der äußeren Funktion $(3x^3 - 3x)^3$ ergibt $3 \cdot (3x^3 - 3x)^2$. Der Term $3x^2 - 3x$ muss daher quadriert werden.
Die Ableitung der inneren Funktion $3x^3 - 3x$ ergibt $9x^2 - 3$. Der Term $9x^2 - 3$ muss daher in Klammern stehen.
B) Richtig.

3.151 **A)** Es wurde nicht die Produktregel angewendet, sondern die Faktoren $3x$ und $\cos(2x)$ unabhängig voneinander abgeleitet.
B) Richtig.

3.152 **a)** $f'(t) = 2e^{2t}$, $f''(t) = 4e^{2t}$, $f'''(t) = 8e^{2t}$
b) $f'(x) = 4 \cdot \ln(2) \cdot 2^{4x}$, $f''(x) = 16 \cdot \ln^2(2) \cdot 2^{4x}$, $f'''(x) = 64 \cdot \ln^3(2) \cdot 2^{4x}$
c) $f'(z) = \frac{1}{z}$, $f''(z) = -\frac{1}{z^2}$, $f'''(z) = \frac{1}{z^3}$

3.153 **a)** $y^{(4)} = 4e^x + x \cdot e^x$ **b)** $y^{(8)} = 256 \cdot \sin(2x)$ **c)** $y^{(7)} = -\frac{120}{x^6}$

3.154 **a)** $y' = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$, $y'' = \frac{8}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$
b) $y' = 3e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \sin(x)$, $y'' = 2e^x \cdot \cos(x) - 4e^x \cdot \sin(x)$
c) $y' = \frac{x \cdot e^x - 1}{x^2 + 2x + 1}$, $y'' = \frac{x^2 \cdot e^x + e^x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

3.155 Die erste Ableitung lautet $y' = -\frac{5}{(x-3) \cdot (x+2)}$.
Der Definitionsbereich von y ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} | (x < -2) \vee (x > 3)\}$ oder anders formuliert:
Es ist das Intervall $[-2; 3]$ ausgenommen.
Für den Definitionsbereich von y′ gilt D_f: $x \neq -2; 3$. Es sind nur zwei Werte ausgenommen.
Der Definitionsbereich von y′ ist größer als der Definitionsbereich von y.

3.156 **a)** **1)** Produkt aus zwei Funktionen bzw. Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion
2) Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion bzw. Quotient zweier Funktionen
3) Verkettete Funktionen
4) Verkettete Funktionen

b) ***1)*** Produkt aus zwei Funktionen bzw. Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion
2) Produkt aus zwei Funktionen
3) Quotient zweier Funktionen bzw. Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion
4) Verkettete Funktionen

c) ***1)*** Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion bzw. Quotient zweier Funktionen
2) Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion bzw. Produkt aus zwei Funktionen
3) Verkettete Funktionen
4) Produkt aus zwei Funktionen

3.157 ***a)*** Produkt- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregeln für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen $y' = 5x^3 \cdot \cos(5x) + 3x^2 \cdot \sin(5x)$

b) Produkt- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregeln für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen $y' = -4x^4 \cdot \sin(2x) + 8x^3 \cdot \cos(2x) + 2x \cdot \sin(2x) - \cos(2x)$

c) Produkt- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregeln für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen $y' = 4x^2 \cdot \cos(4x) + 2x \cdot \sin(4x) - 8x \cdot \cos(4x) - 2 \cdot \sin(4x) + 4 \cdot \cos(4x)$

3.158 ***a)*** Produkt- und Kettenregel, Summenregel, Ableitungsregeln für den natürlichen Logarithmus und für Potenzfunktionen $y' = 2x \cdot \ln(2 - x) - \frac{x^2}{2 - x}$

b) Produkt- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregeln für den natürlichen Logarithmus und für Potenzfunktionen $y' = 2 \cdot \ln(x - 2x^2) + \frac{8x - 2}{2x - 1}$

c) Produkt- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregeln für den natürlichen Logarithmus und für Potenzfunktionen $y' = \frac{5 - \ln\left(\frac{x^5}{9}\right)}{x^2}$

3.159 ***a)*** Quotienten- und Kettenregel, Faktor und Summenregel, Ableitungsregel für Potenzfunktionen $y' = \frac{3t^4 + 16t^3 + 27t^2 + 18t}{(t + 1)^2}$

b) Quotienten- und Kettenregel, Faktor- und Summenregel, Ableitungsregel für Potenzfunktionen $y' = -\frac{3t^2 - 18t}{(t + 3)^4}$

c) Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, Summenregel, Ableitungsregel für Potenzfunktionen $y' = -\frac{3t + 1}{(t - 1)^3}$

3.160 ***a)*** Quotienten- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregel für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen $y' = -\frac{\cos(x) \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(2x)}{(\cos(2x))^2}$

b) Quotienten- und Kettenregel, Ableitungsregel für Winkelfunktionen und für Potenzfunktionen $y' = \frac{\cos^2(x) + 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{x^2}$

c) Quotienten- und Kettenregel, Faktorregel, Ableitungsregel für Winkelfunktionen, für Potenzfunktionen und für Exponentialfunktionen $y' = \frac{4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) - \sin^2(2x)}{e^x}$

3.161 ***1)*** $f_1(6) = f_2(2) = -0{,}279...$, $f_1'(6) = 0{,}960...$, $f_2'(2) = 2{,}880...$
Die Funktionswerte sind gleich, die Steigung von f_2 ist 3-mal so groß wie die Steigung von f_1.

2) $f_3(4) = f_4(8) = 54{,}598...$, $f_3'(4) = 54{,}598...$, $f_4'(8) = 27{,}299...$
Die Funktionswerte sind gleich, die Steigung von f_4 ist halb so groß wie die Steigung von f_3.

3.162 ***a)*** $f'(x) = \frac{3 \cdot \sin(3x)}{\cos^2(3x)}$ ***b)*** $y' = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$ ***c)*** $f'(t) = -\frac{2 \cdot \cos\left(\frac{2}{t}\right)}{t^2}$

3.163 ***a)*** $y' = \frac{9x \cdot \sqrt{x} - 36x}{2x - 12 \cdot \sqrt{x} + 18}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{5}{(x+5)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+5}{x-5}}$ ***c)*** $y' = \frac{\sqrt{x} - 2}{4 \cdot \sqrt{x} - 2x - 2}$

3.164 ***a)*** $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 4} \cdot \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ ***b)*** $y' = -\frac{3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 3}}{2x^6 - 12x^3 + 18}$ ***c)*** $y' = \frac{3x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{(18x^4 - 24x^2 + 8) \cdot \sqrt{1-x}}$

3.165 ***a)*** $y' = -9x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(3x^3) + \frac{\cos(3x^3)}{2 \cdot \sqrt{x}}$ ***c)*** $y' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(3x) - 3 \cdot \sin(x) \cdot \sin(3x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x) \cdot \cos(3x)}}$

b) $y' = \frac{\sin(\sqrt{x})}{2} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2x \cdot \sqrt{x}} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$

3.166 ***a)*** $y' = \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 1}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ***c)*** $y' = \frac{\ln(2) \cdot 2^x}{2^x - 1}$

3.167 ***a)*** $\frac{dR}{dw} = -\frac{6w^3u^2 - 28wu^2}{\sqrt{(w^4 - 2u)^3}}$; $\frac{dR}{du} = -\frac{7w^6 - 6w^4u - 7w^2u + 9u^2}{\sqrt{(w^4 - 2u)^3}}$

b) $\frac{dN}{dq} = -\frac{3m^2 \cdot \sqrt{q} - m}{2 \cdot (m^2 - \sqrt{q})^2 \cdot \sqrt{3q^2 - m \cdot q}}$; $\frac{dN}{dm} = \frac{3m^2 - 12m \cdot q + \sqrt{q}}{2 \cdot (m^2 - \sqrt{q})^2 \cdot \sqrt{3q - m}}$

3.168 ***a)*** $\frac{dS}{da} = \frac{5a^{2f} \cdot (4f - 1) + 6f^a \cdot (1 - 2a \cdot \ln(f))}{2af \cdot \sqrt{2af}}$; $\frac{dS}{df} = \frac{5a^{2f} \cdot (4f \cdot \ln(a) - 3) + 6f^a \cdot (3 - 2a)}{2f^2 \cdot \sqrt{2af}}$

b) $\frac{dH}{dr} = \frac{5b^3r^b + 5b^2r^b - 3b^{3r+2} \cdot \ln(b) \cdot r - b^{3r+2}}{b^2 - r^3} + \frac{15b^2r^{b+3} - 3b^{3r+2}r^3}{b^4 - 2b^2r^3 + r^6}$;

$\frac{dH}{db} = \frac{10br^{b+1} + 5b^2r^{b+1} \cdot \ln(r) - 3b^{3r+1}r^2 - 2b^{3r+1}r}{b^2 - r^3} + \frac{10b^3r^{b+1} - 2b^{3r+3}r}{b^4 - 2b^2r^3 + r^6}$

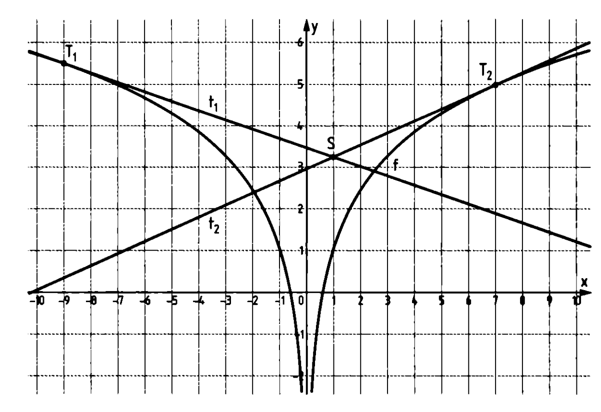
3.169 ***a)*** $\frac{dT}{da} = \frac{-a^2b^2 + 2a^2b - 6ab - 2b}{(a-3)^{b+1}}$; $\frac{d^2T}{da^2} = \frac{a^2b^3 - 3a^2b^2 + 2a^2b + 12ab^2 - 12ab + 2b^2 + 20b}{(a-3)^{b+2}}$;

$\frac{dT}{db} = \frac{a^2 - a^2b \cdot \ln(a-3) - 2 \cdot \ln(a-3)}{(a-3)^b}$

b) $\frac{dU}{dt} = 2 \cdot e^{-\frac{2t}{A}}$; $\frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{4}{A} \cdot e^{-\frac{2t}{A}}$; $\frac{dU}{dA} = 1 - e^{-\frac{2t}{A}} \cdot \left(1 + \frac{2t}{A}\right)$

3.170 ***1)*** t_1: $y = -0,\dot{2} \cdot x + 3,493...$, t_2: $y = 0,285...x + 2,990...$

2) S(1|3,3)



3) S(0,989...|3,273...)

3.171 ***1)*** t: $y = -9,824... \cdot x + 141,295...$

2) und ***3)*** S(13,052...|13,052...), $\alpha = 50,811...°$

3.172 Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen ergibt $f(x) = \ln(x) - \ln(4)$ bzw. $g(x) = \ln(x) - \ln(5)$. Die Ableitung der Summanden $\ln(4)$ bzw. $\ln(5)$ ist null und es gilt daher $f'(x) = g'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

3.173 ***a)*** $y^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{a \cdot x}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow y'(1) = a^1 \cdot e^{a \cdot x} = a \cdot e^{a \cdot x}$

3. Schritt: $(y^{(n)})'(x) = a \cdot a^n \cdot e^{a \cdot x} = a^{n+1} \cdot e^{a \cdot x} = y^{(n+1)}(x)$

b) $s^{(n)}(t) = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(a \cdot t + 1)^{n+1}}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow s'(t) = \frac{-a}{(a \cdot t + 1)^2}$

3. Schritt: $(s^{(n)}(t))' = (-a)^n \cdot n! \cdot (-n-1) \cdot (a \cdot t + 1)^{-n-2} \cdot a = (-a)^n \cdot n! \cdot (-1) \cdot (n+1) \cdot (a \cdot t + 1)^{-n-2} \cdot a =$

$= (-a)^n \cdot (-a) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (a \cdot t + 1)^{-n-2} = \frac{(-a)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(a \cdot t + 1)^{n+2}} = s^{(n+1)}(t)$

c) $f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(t+1)^n}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t+1}$

3. Schritt: $(f^{(n)}(t))' = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot (t+1)^{-n-1} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-1) \cdot n \cdot (t+1)^{-n-1} =$

$= (-1)^{n+2} \cdot n! \cdot (t+1)^{-n-1} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{(t+1)^{n+1}} = f^{(n+1)}(t)$

d) $u^{(n)}(c) = (b \cdot \ln(a))^n \cdot a^{b \cdot c}$; 1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow u'(c) = b \cdot \ln(a) \cdot a^{b \cdot c}$

3. Schritt: $(u^{(n)}(c))' = (b \cdot \ln(a))^n \cdot b \cdot \ln(a) \cdot a^{b \cdot c} = (b \cdot \ln(a))^{n+1} \cdot a^{b \cdot c} = u^{(n+1)}(c)$

3.174 $f'(x) = u'(x) \cdot v^{-1}(x) + u(x) \cdot (-1) \cdot (v(x))^{-2} \cdot v'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

3.175 $f(x) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

3.176 ***a)*** $y = \sinh(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \cdot (-1) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

b) $y = \cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \cdot (-1) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

c) $y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow y' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

3.177
$$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) - a \cdot \frac{1}{\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) \cdot x - \left(a + \sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{ax}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{x^2 + a \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2}{x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2 \cdot \left(\sqrt{a^2 - x^2} + a\right)}{\left(a + \sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{-x^2 + a^2}{x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

3.182 ***a)*** $y' = \frac{3x^2 + 7}{3y^2}$ ***b)*** $y' = \frac{y \cdot \sin(x) - \sin(y)}{x \cdot \cos(y) + \cos(x)}$ ***c)*** $y' = \frac{e^x - y}{x + e^y}$

3.183 ***a)*** 0,353... bzw. −0,353... ***b)*** 0 ***c)*** 0

3.184 ***a)*** $y' = 2x^{3x} \cdot (3 \cdot \ln(x) + 3)$ ***b)*** $y' = \frac{\sqrt[x]{3x}}{x^2} \cdot (1 - \ln(3x))$ ***c)*** $y' = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x) + 2}{2 \cdot \sqrt{x}}$

3.185 ***a)*** $y' = (\sin(x))^x \cdot \left(\ln(\sin(x)) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)}\right)$

b) $y' = x^{\tan(x)} \cdot \left(\frac{\ln(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{x}\right)$

c) $y' = (\sin(x))^{\cos(x)} \cdot \left(\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} - \sin(x) \cdot \ln(\sin(x))\right)$

3.186 ***a)*** $y' = x^{\ln(x)} \cdot \frac{\ln(x^2)}{x}$ ***b)*** $y' = (\ln(x))^x \cdot \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right)$ ***c)*** $y' = \frac{(\ln(x))^{\ln(x)}}{x} \cdot (\ln(\ln(x)) + 1)$

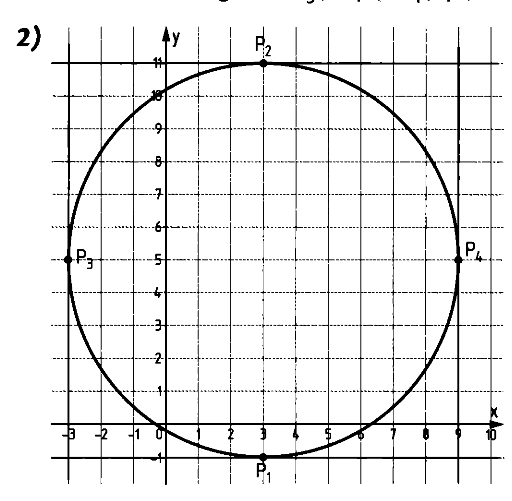
3.187 ***a)*** $y' = \frac{22x + 46}{(x+5)^3}$ ***b)*** $y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2-1)^3}}$ ***c)*** $y' = \frac{13x^2 + 29x + 12}{12 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3}}$

3.188 ***a)*** ***1)*** waagrechte Tangente: $P_1(3|-1)$, $P_2(3|11)$,
senkrechte Tangente: $P_3(-3|5)$, $P_4(9|5)$

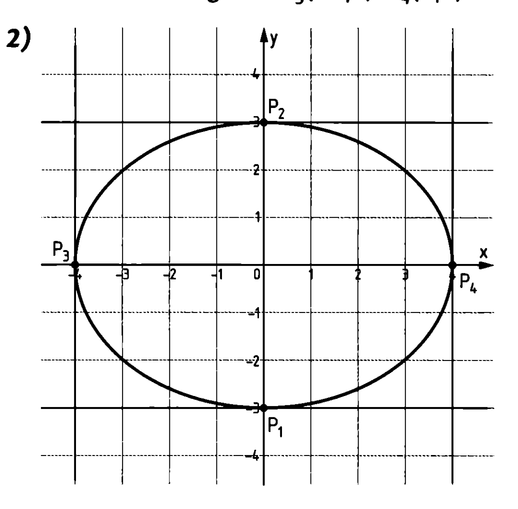


b) ***1)*** waagrechte Tangente: $P_1(0|-3)$, $P_2(0|3)$,
senkrechte Tangente: $P_3(-4|0)$, $P_4(4|0)$

a) ***2)***



b) ***2)***



3.189 $y'(0) = 0, y'(3) = -1$

3.190 $t: y = \frac{x}{2}$

3.191 $\frac{dV_m}{dp} = \frac{V_m - b}{\frac{a}{V_m^2} - \frac{2ab}{V_m^3} - p}$

3.192 $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \Rightarrow \ln(k(t)) = \ln(K(t)) - \ln(L(t)) \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt:

$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)}$ und das ist in anderer Schreibweise: $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$

3.193 ***a)*** $\cos(y) = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $-\sin(y) \cdot y' = 1 \Rightarrow$ umformen auf:

$y' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ einsetzen ergibt: $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\tan(y) = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $(1 + \tan^2(y)) \cdot y' = 1 \Rightarrow$ umformen auf:

$y' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$ ergibt: $y' = \frac{1}{1 + x^2}$

3.194 $y = \log_a(x) \Rightarrow a^y = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $a^y \cdot \ln(a) \cdot y' = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \frac{1}{a^y \cdot \ln(a)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

3.195 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(u(x)) - \ln(v(x)) \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt:

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)} \Rightarrow$ auf gemeinsamen Nenner bringen und umformen ergibt:

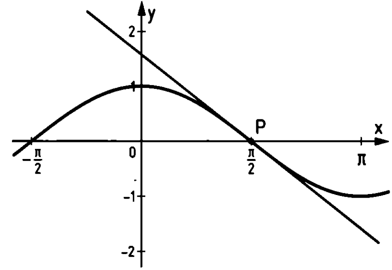
$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$

3.196 $y = a^x \Rightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(a) \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $\frac{y'}{y} = \ln(a) \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$

3.197 $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y^n = x \Rightarrow$ implizites Differenzieren ergibt: $n \cdot y^{n-1} \cdot y' = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n \cdot x^{\frac{1}{n} \cdot (n-1)}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1}$

3.198 Beide wissen, dass sich die Falltiefe mit der Formel $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ berechnet.
Für t = 1 s ergibt das eine Falltiefe von $\frac{10}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot (1\,s)^2 = 5$ m.
Thomas weiß, dass die Beschleunigung konstant $10\,\frac{m}{s^2}$ beträgt. Das ergibt bei einer Sekunde einen Weg von 10 m, also in 0,2 Sekunden 2 Meter. Diesen Sachverhalt zeigt die eingezeichnete Tangente. Karin rechnet s(1,2) – s(1) = 2,2 m. Sie berechnet die Differenz der y-Werte des Graphen.

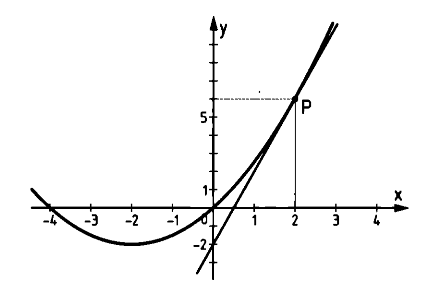
3.200



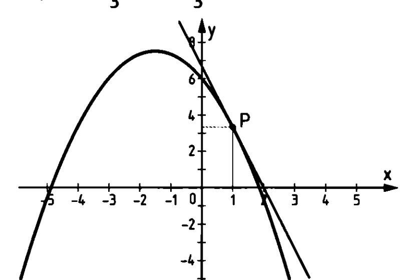
$\Delta x = dx$	Δy	dy	$\frac{dy}{\Delta y}$	prozentueller Fehler
0,05	–0,049...	–0,05	1,000...	0,041...
0,1	–0,099...	–0,1	1,001...	0,166...
0,15	–0,149...	–0,15	1,003...	0,375...
0,2	–0,198...	–0,2	1,006...	0,669...
0,25	–0,247...	–0,25	1,010...	1,049...
0,3	–0,295...	–0,3	1,015...	1,515...
0,35	–0,342...	–0,35	1,020...	2,071...
0,4	–0,389...	–0,4	1,027...	2,717...
0,45	–0,434...	–0,45	1,034...	3,456...

Bis zu einer Abweichung des Winkels um 0,35 rad ist der prozentuelle Fehler kleiner als 2,5 %.

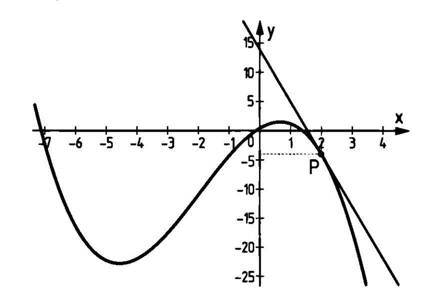
3.201 ***a)*** t: y = 4x – 2; [1,580...; 2,583...]

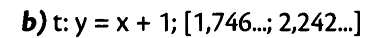


b) t: $y = -\frac{10}{3} \cdot x + \frac{20}{3}$; [0,634...; 1,267...]

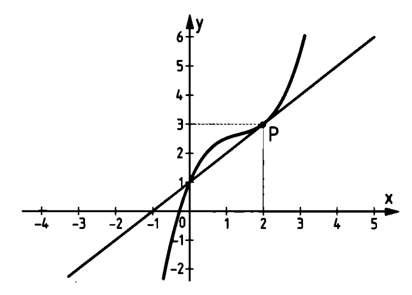


3.202 ***a)*** t: $y = -9x + 14$; [1,877...; 2,166...]

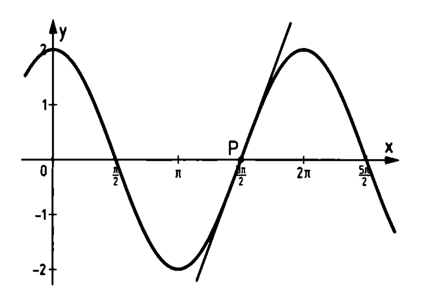




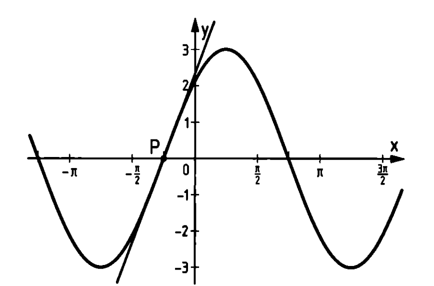
b) t: $y = x + 1$; [1,746...; 2,242...]



3.203 ***a)*** t: $y = 2x - 3\pi$; [4,368...; 5,056...]



b) t: $y = 3x + \frac{3\pi}{4}$; [−1,129...; −0,441...]



3.204 ***a)*** t: $y = \frac{1}{4} \cdot x$, $\Delta y = 0{,}024\,6...$, $dy = 0{,}025$, 1,255... % Fehler
b) t: $y = 43{,}301... \cdot x$, $\Delta y = 12{,}5$, $dy = 11{,}336...$, 9,310... % Fehler

3.205 ***1)*** $y = 3e^3 \cdot x - 2e^3 - 1$
2) 1,064... % bei $x = 1{,}05$

3.207 ΔV genau: 4 665,788... cm^3; ΔV näherungsweise: 4 751,658... cm^3,
Fehler absolut: 85,870... cm^3; Fehler in Prozent: 1,840... %

3.208 Oberfläche: maximaler Fehler 10 %; Volumen: maximaler Fehler 15 %

3.209 ***1)*** „$\frac{0}{0}$“ ***2)*** $0 \cdot 1 = 0$ ***3)*** „$\frac{0}{0}$“
Die Ergebnisse von ***1)*** und ***3)*** sind unbestimmte Ausdrücke.

3.212 ***a)*** 3 ***b)*** 6 ***c)*** 0

3.213 ***a)*** 12 ***b)*** −1 ***c)*** 0

3.314 ***a)*** 2 ***b)*** $-\infty$ ***c)*** $\frac{7}{3}$

3.215 ***a)*** 0 ***b)*** 0 ***c)*** ∞

3.216 ***a)*** 2 ***b)*** 0 ***c)*** 0

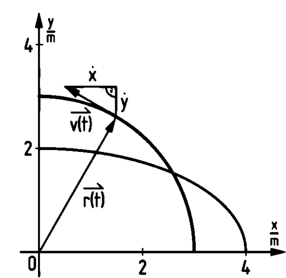
3.217 ***a)*** 0 ***b)*** ∞ ***c)*** 0

3.218 ***a)*** ∞ ***b)*** ∞ ***c)*** ∞

3.219 ***a)*** 0 ***b)*** ∞ ***c)*** $\frac{1}{\ln(a)}$

3.220 ***1)*** $\frac{r_i}{n - 1}$
2) Die Brennweite einer Planlinse ist von der Scheiteldicke d unabhängig.

3.221



3.226 ***a)*** $\dot{x} = 1, \dot{y} = 2t, t: y = 2x - 3$ ***b)*** $\dot{x} = 2t, \dot{y} = 2, t: y = x + 2$ ***c)*** $\dot{x} = 4t, \dot{y} = 3t^2, t: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ ***d)*** $\dot{x} = 1, \dot{y} = t, t: y = x - 1{,}5$

3.227 ***a)*** $\dot{x} = -\frac{1}{(t+3)^2}, \dot{y} = 1, t: y = -16x + 4$ ***b)*** $\dot{x} = 2t, \dot{y} = -\frac{2}{t^3}, t: y = -x + 4$ ***c)*** $\dot{x} = 4, \dot{y} = -\frac{3t^2}{(t^3+4)^2}, t: y = -0{,}03x + 0{,}32$ ***d)*** $\dot{x} = \frac{4+t^2}{(4-t^2)^2}, \dot{y} = 2, t: y = 3{,}6x + 0{,}8$

3.228 ***a)*** $t: y = -\frac{1}{4}x + \sqrt{2}, \alpha = -14{,}036...°$ ***b)*** $t: x = \frac{\pi}{4}, \alpha = 90°$ ***c)*** $t: x = \frac{\pi}{4}, \alpha = 90°$ ***d)*** $y = -\sqrt{2} \cdot x + 6, \alpha = -54{,}735...°$

3.229 ***a)*** $t: y = -2{,}185...\ m \cdot x + 7{,}208...\ m$ ***b)*** $P(1{,}893...\ m|0{,}227...\ m)$

3.230 ***1)*** $\alpha = 90°$ ***2)*** $P_1(0{,}628...\ m|0{,}4\ m), P_2(1{,}884...\ m|0{,}4\ m), P_3(3{,}141...\ m|0{,}4\ m)$

3.231 ***1)*** 0,979... m ***2)*** $5{,}291...\ \frac{m}{s}$ ***3)*** $\alpha = 67{,}792...°$

3.232 ***1)*** $x(t) = 0{,}772... \cdot t, y(t) = 39{,}866... - 0{,}207... \cdot t - 5t^2$ ***2)*** 2,166... m ***3)*** $28{,}248...\ \frac{m}{s}; \alpha = 88{,}432...°$

3.233 ***1)*** – ***2)*** $t: y = 0{,}314...x + 2{,}671...; 17{,}466...°$

3.234 ***a)*** $S_1(1{,}664...|1{,}664...), S_2(-1{,}664...|1{,}664...), S_3(-1{,}664...|-1{,}664...), S_4(1{,}664...|-1{,}664...); 42{,}075...°$
b) $S_1(4{,}607...|1{,}165...), S_2(-4{,}607...|1{,}165...), S_3(-4{,}607...|-1{,}165...), S_4(4{,}607...|-1{,}165...); 78{,}614...°$

3.235 60°

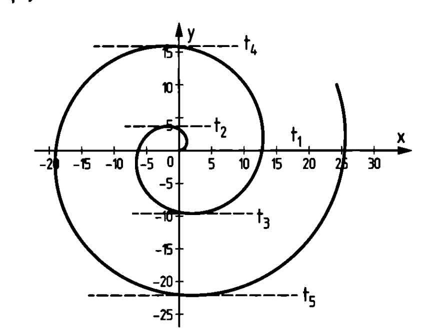
3.236 ***1)*** 4,240... m ***2)*** $17{,}753...\ \frac{m}{s}, -22{,}661...°$

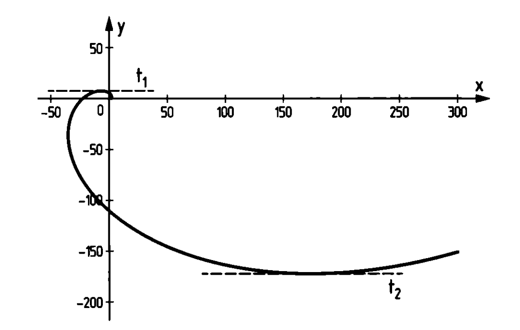
3.238 ***a)*** $\tan(\delta) = \frac{\varphi}{2}, \tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi) + \varphi}{2 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$ ***b)*** $\tan(\delta) = \varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) + \varphi}{1 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$ ***c)*** $\tan(\delta) = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}, \tan(\alpha) = -\frac{\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}{\sin(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$ ***d)*** $\tan(\delta) = 2\varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) + 2\varphi}{1 - 2\varphi \cdot \tan(\varphi)}$

3.239 ***a)*** $\tan(\delta) = -\frac{\cos(\varphi)}{2 \cdot \sin(\varphi)}, \tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)}{3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}$ ***b)*** $\tan(\delta) = -\frac{2}{\tan(\varphi)}, \tan(\alpha) = \frac{\sin^2(\varphi) - 2 \cdot \cos^2(\varphi)}{3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}$ ***c)*** $\tan(\delta) = -\tan(\varphi), \tan(\alpha) = 0$ ***d)*** $\tan(\delta) = -\varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) - \varphi}{1 + \varphi \cdot \tan(\varphi)}$

3.240 ***a)*** t_1: $y = 0$, t_2: $y = 3{,}639...$, t_3: $y = -9{,}628...$, t_4: $y = 15{,}833...$, usw.

b) t_n: $y = e^{(4n-1)\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot \sin\left((4n-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$





3.241 ***a)*** -1 ***b)*** $-\frac{1}{6}$ ***c)*** $\frac{1}{8}$

3.242 ***a)*** $60\,\frac{m}{s}$ ***b)*** $2\,\frac{m}{s}$ ***c)*** $1\,\frac{m}{s}$

3.243 ***a)*** $1 \to C$, $2 \to A$ ***b)*** $1 \to D$, $2 \to C$

3.244 $h'(t) = \sqrt{\frac{0{,}15}{70 \cdot \tan(50°) \cdot t}}\ \frac{dm}{s}$

3.245

a) $f'(x) = \begin{cases} 0 & -4 \leq x < -2 \\ 1 & -2 < x < 3 \\ 0 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & -4 \leq x < -1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 < x < 1 \\ 3 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$

c) $f'(x) = \begin{cases} 1 & -5 \leq x < -2{,}5 \\ -1 & -2{,}5 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ -2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

d) $f'(x) = \begin{cases} 4 & -5 \leq x < -3 \\ 2 & -3 < x < -1 \\ -2 & -1 < x < 2 \\ -5 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$

a) bis ***d)*** Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

3.246 ***a)*** $y' = 2x - 2$ ***b)*** $f'(x) = -4x + 1$ ***c)*** $g'(x) = x - 0{,}25$

a) bis ***c)*** Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

3.247 ***a)*** $y' = 23x^{22}$ ***b)*** $y' = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$ ***c)*** $y' = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$ ***d)*** $y' = -\frac{4}{x^5}$ ***e)*** $y' = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$ ***f)*** $y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ ***g)*** $y' = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^5}}$ ***h)*** $y' = -\frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x^{11}}}$

3.248 ***1)*** $y' = a$ ***2)*** $y' = \frac{1}{a}$ ***3)*** $y' = \frac{1}{b}$ ***4)*** $y' = -\frac{1}{b}$ ***5)*** $y' = a \cdot b$ ***6)*** $y' = -\frac{a}{b}$

3.249 ***a)*** $y' = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ***b)*** $\dot{s} = 4 \cdot e^t$ ***c)*** $f'(x) = \frac{3}{x}$

3.250 ***a)*** $f'(x) = 6x + 2$, $f''(x) = 6$

b) $\dot{s} = 15t^2 - 14t - 4$, $\ddot{s} = 30t - 14$

c) $f'(x) = -6x^2 + 6x - 4$, $f''(x) = -12x + 6$

d) $f'(x) = -\frac{3}{x}$, $f''(x) = \frac{3}{x^2}$

e) $f'(t) = 3 \cdot \cos(t) - 4$, $f''(t) = -3 \cdot \sin(t)$

f) $f'(x) = f''(x) = 3 \cdot e^x$

3.251 **a)** $y'(3) = 17$ **b)** $y'(-1) = -0{,}75$ **c)** $y'(2) = 9{,}\dot{3}$

3.252 **a)** $y = -2x + 0{,}5$ **b)** $y = 0{,}5x - 0{,}5$ **c)** $y = 2x - 1$

3.253 **a)** $y' = 3 \cdot \cos(x),\ y'' = -3 \cdot \sin(x)$ **b)** $y' = \frac{2}{x},\ y'' = -\frac{2}{x^2}$ **c)** $f'(x) = f''(x) = 3 \cdot e^x$

3.254 **a)** $y' = 3 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x)$ **b)** $f'(x) = 4x^3 \cdot \cos(x) - x^4 \cdot \sin(x)$ **c)** $f'(t) = 2 \cdot \cos^2(t) - 2 \cdot \sin^2(t)$ **d)** $y' = \sin(x) \cdot \tan^2(x) + 2 \cdot \sin(x)$

3.255 **a)** $f'(t) = a \cdot e^{-t}$ **b)** $f'(t) = a \cdot \left(\frac{t}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)$ **c)** $f'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2a}}}{2a} + a$

3.256 **a)** $y' = 3x \cdot e^x + 3e^x$ **b)** $y' = x^3 \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x + 2e^x$ **c)** $y' = 4x^2 \cdot e^x + 8x \cdot e^x + 8x$ **d)** $y' = -x \cdot e^x - 2e^{2x} + 1$

3.257 **a)** $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 0{,}5$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = -0{,}6$

3.258 **a)** $t = 0{,}125$ **b)** $t_1 = -0{,}438...;\ t_2 = 0{,}438...$ **c)** $t = 0{,}288...$

3.259 **a)** $f'(x) = \frac{3x^2 - 10x}{(3x - 5)^2}$ **b)** $f'(x) = \frac{-12x^4 - 12x^3 - 40x - 10}{(3x^3 - 5)^2}$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (2x - 1)}$ **d)** $f'(x) = \frac{21 \cdot \sqrt{x^3} - 84x}{2 \cdot (\sqrt{x} - 3)^2}$

3.260 **a)** $f'(x) = \frac{-6x \cdot \cos(x) + 6 \cdot \sin(x) + 2}{(3 \cdot \sin(x) + 1)^2}$ **b)** $f'(x) = \frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + 1}{\cos^2(x)}$ **c)** $f'(x) = \frac{2x^2 \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x) + 4x \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x)}{(\sin(x) + 2 \cdot \cos(x))^2}$ **d)** $f'(x) = \frac{2 \cdot (1 + \tan^2(x))}{(1 - \tan(x))^2}$

3.261 **a)** $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ **b)** $f'(x) = \frac{-2x^2 \cdot e^x + x \cdot e^x - e^x + 4x + 3}{(e^x + 1)^2}$ **c)** $f'(x) = \frac{2 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)}{e^x}$ **d)** $f'(x) = \frac{2e^x \cdot \sin(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$

3.262 **a)** $f'(x) = 12x \cdot (x^2 + 5)^5$ **b)** $f'(x) = 5 \cdot \cos(5x)$ **c)** $f'(x) = \frac{8}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x - 1)^2}}$ **d)** $f'(x) = -4x \cdot \sin(2x^2)$ **e)** $f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2}$ **f)** $f'(x) = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$ **g)** $f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}$ **h)** $f'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)}}$

3.263 **a)** $y' = \sin(x) \cdot \cos(x) - x \cdot \sin^2(x) + x \cdot \cos^2(x)$
b) $y' = e^x \cdot (3x^2 \cdot \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) + 6x \cdot \sin(x))$
c) $y' = 2^x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \sin(x) + \sqrt{3x} \cdot \sin(x) \cdot \ln(2) + \sqrt{3x} \cdot \cos(x)\right)$

3.264 **a)** $y' = \frac{x^3 \cdot e^x - x^2 \cdot e^x + x \cdot e^x + e^x}{(x^2 + 1)^2}$ **b)** $y' = \frac{4x \cdot e^x + e^{2x} - 1}{2 \cdot \sqrt{x^3} \cdot (1 - e^x)^2}$ **c)** $y' = \frac{3x}{2} \cdot \frac{4e^x - 3 \cdot \sqrt{x} \cdot e^x + 4 - 3 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot e^x - 2 \cdot \sqrt{x^3} \cdot e^x}{(1 - \sqrt{x})^2}$

3.265 **a)** $y' = \frac{5x^2 \cdot (\cos(5x) - \sin(5x)) - 2x \cdot (\sin(5x) + \cos(5x)) + 5}{(x^2 - \sin(5x))^2}$
b) $y' = \frac{2 \cdot \sin(3x) \cdot (\cos(2x) + \sin(2x)) - 3 \cdot \cos(3x) \cdot (\sin(2x) - \cos(2x))}{\sin^2(3x)}$
c) $y' = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \sin(2x)}{\cos^2(2x)}$

3.266 ***a)*** $y' = \frac{\cos(x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x) + 0{,}5}}$ ***b)*** $y' = \frac{2x - 3}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 5}}$ ***c)*** $y' = \frac{1}{(1 - x) \cdot \sqrt{1 - x^2}}$

3.267 ***a)*** A ist falsch. Die Ableitung einer Funktion, die das Produkt zweier Funktionen ist, ist nicht das Produkt der beiden Ableitungen, sondern verlangt die Anwendung der Produktregel.
b) A ist falsch. Anwenden der Produktregel auf den Term $(-x \cdot \sin(x))$ ergibt $(-(\sin(x) + x \cdot \cos(x)))$. Auflösen der Klammern ergibt $(-\sin(x) - x \cdot \cos(x))$.

3.268 $\frac{dz}{da} = b^c$, $\frac{dz}{db} = a \cdot c \cdot b^{c-1}$, $\frac{dz}{dc} = a \cdot b^c \cdot \ln(b)$, $\frac{dz}{df} = 1$

3.269 $\frac{df}{dA} = \frac{e^B}{S}$, $\frac{df}{dB} = \frac{A \cdot e^B}{S}$, $\frac{df}{dC} = \frac{1}{S}$, $\frac{df}{dS} = -\frac{A \cdot e^B + C}{S^2}$, $\frac{df}{dt} = 0$

3.270 ***a)*** $y' = -\frac{1}{6e^{\frac{x}{3}} \cdot \sqrt{e^{-\frac{x}{3}} + 1}}$ ***c)*** $y' = -\frac{2}{\sin^2(2x)}$

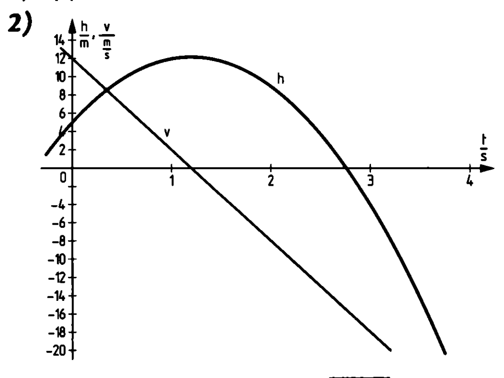
b) $y' = 4x \cdot \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$ ***d)*** $y' = \frac{x}{x^2 + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$

3.271 A) und C) Richtig
B) Für die richtige Anwendung der Kettenregel fehlt die Ableitung der inneren Funktion.

3.272 B) Richtig
A) Die Funktion f(t) ist zweifach verkettet. Die äußere Ableitung (Ableitung der Potenzfunktion) wurde nicht vollständig durchgeführt und die innere Ableitung (Anwendung der Faktorregel) wurde vergessen.

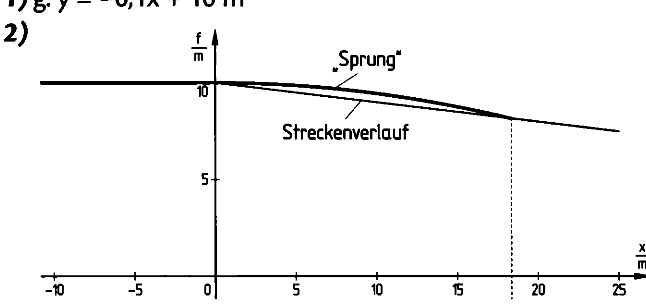
3.273 Die Opposition hat Recht, da die Arbeitslosenrate von 7,2 % auf ca. 8,85 % gestiegen ist.
Der Politiker der Regierungspartei hat Recht, da die Steigung der Kurve ca. ab dem 6. Monat kleiner wird.

3.274 ***1)*** $v(t) = -10t + 12$
2)



3.275 ***1)*** $v = at$ ***2)*** $8{,}\overline{0008}$ s ***3)*** 355,591... m

3.276 ***1)*** g: $y = -0{,}1x + 10$ m ***3)*** 18,348... m
4) 18,440... m
5) −5,599...°
2)



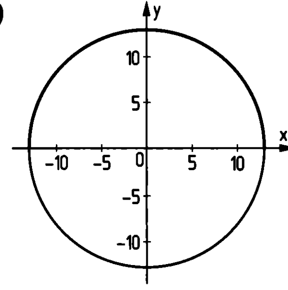
3.277 a) $y' = -\frac{y+2}{x+2}$ **b)** $y' = \frac{y \cdot \cos(xy) + \cos(x) \cdot \cos(y)}{\sin(x) \cdot \sin(y) - x \cdot \cos(xy)}$ **c)** $y' = \frac{y - y \cdot e^x + e^y}{e^x - x \cdot e^y - x}$

3.278 a) ∞ **b)** ∞ **c)** ∞

3.279 a) 1 **b)** $\nexists$ g **c)** 1

3.280 a) 0 **b)** $1{,}\dot{6}$ **c)** 0

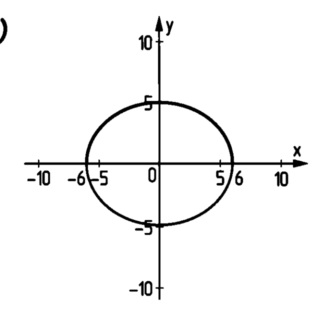
3.281 a) 1)



2) t: $y = -2{,}4x + 33{,}8$

3) Die Kurve hat an den Stellen mit $y'(x) = 0$ waagrechte Tangenten und an den Stellen mit $x'(y) = 0$ senkrechte Tangenten. Durch Umformen der Gleichung auf y bzw. x, Ableiten und Nullsetzen erhält man die gesuchten Stellen.

b) 1)



2) t: $y = -0{,}481...x + 5{,}773...$

3) siehe **a)**

3.282 1) $t: y = \frac{3}{5}x$

2)

$\Delta x = dx$	$\Delta y = 3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta x}{5}}\right)$	$dy = \frac{3}{5} \cdot \Delta x$	$\frac{dy}{\Delta y}$	Fehler in %
0,1	0,059 4...	0,06	$1{,}010\,0\dot{3}$	$1{,}00\dot{3}$
0,5	0,285...	0,3	1,050 8...	5,083...

3.283 a) $\dot{x} = 1, \dot{y} = 3t^2, t: y = 3x - 2$

b) $\dot{x} = 2t, \dot{y} = -\frac{2}{t^3}, t: y = -x + 2$

c) $\dot{x} = 4t, \dot{y} = 2t, t: y = \frac{x}{2} - 2$

d) $\dot{x} = -\frac{1}{(t+3)^2}, \dot{y} = 2t, t: y = -32x + 9$

3.284 $y'(0{,}3) = -0{,}309...$ Es gibt keine Punkte mit waagrechten Tangenten.

3.285 a) $\tan(\delta) = \frac{\varphi}{2}, \tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\varphi) + \varphi}{2 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$

b) $\tan(\delta) = \varphi, \tan(\alpha) = \frac{\tan(\varphi) + \varphi}{1 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$

c) $\tan(\delta) = \tan(\varphi), \tan(\alpha) = \frac{2 \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$

d) $\tan(\delta) = \frac{\tan(\varphi)}{2}, \tan(\alpha) = \frac{1{,}5 \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi) - 0{,}5 \cdot \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$

3.286 a) $y'(1) = 7$ **b)** $y'(-2) = 23$

3.287 a) $y' = 3 \cdot e^{3x}, y'' = 9 \cdot e^{3x}$

b) $y' = \frac{3}{3x-2}, y'' = -\frac{9}{9x^2 - 12x + 4}$

c) $y' = 10 \cdot \sin(5x) \cdot \cos(5x), y'' = 50 \cdot \cos^2(5x) - 50 \cdot \sin^2(5x)$

d) $y' = 2B \cdot e^{-2x}, y'' = -4B \cdot e^{-2x}$

3.288 a) $x = 2$ **b)** $x = 3$ **c)** $x_1 = -2, x_2 = 2$

3.289 a) $\frac{x^2}{\cos^2(x)} + 2x \cdot \tan(x)$

3.290 1) $15\,\frac{m}{s}$ **2)** $27\,\frac{m}{s}$ **3)** $-12\,\frac{m}{s^2}$

3.291 $A'(t) = 2\pi\,\frac{cm^2}{s^2} \cdot t + 12\pi\,\frac{cm^2}{s}$

3.292 – 3.294

3.292 t_1: $y = 3x - 9$, t_2: $y = -3x - 9$

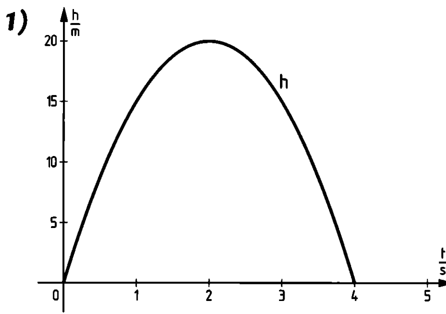
3.293 ***1)*** 2,309... m or 4,890... m ***2)*** 3,6 m

3.294 $r'(t) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\ m^3 + \frac{6}{\pi}\ \frac{m^3}{min} \cdot t\right)^2}}\ \frac{m^3}{min}$

Anwendungen der Differentialrechnung



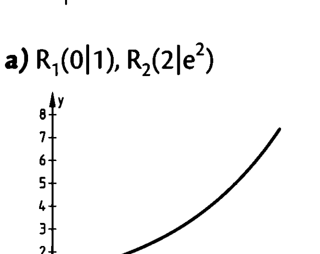
4.1 ***1)***



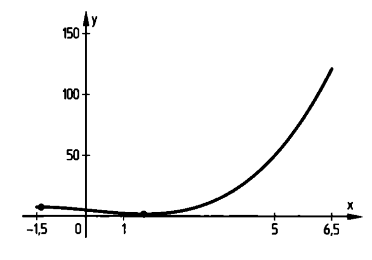
2) $t_{max} = 2$ s, $k = 0$ Die Momentangeschwindigkeit des Balls hat den Wert null.

3) streng monoton wachsend für $t < 2$ s, streng monoton fallend für $t > 2$ s

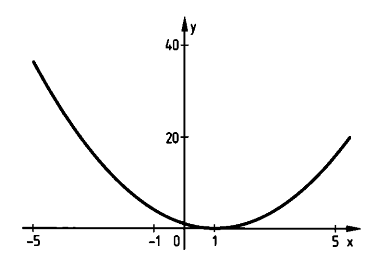
4.3 ***a)*** $R_1(0|1)$, $R_2(2|e^2)$



b) $H(-\sqrt{2}\,|6{,}828...)$, $T(\sqrt{2}\,|1{,}171...)$, $R(6{,}5|121{,}812...)$

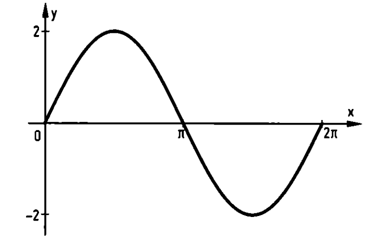


4.4 ***a)*** $T(1|0)$



$f'(x) = 2x - 2$, $f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

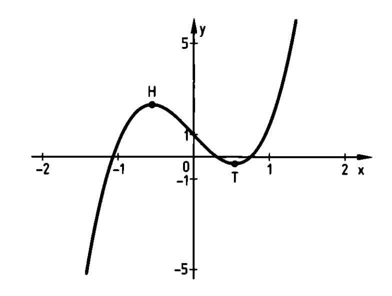
b) $H\left(\frac{\pi}{2}\middle|2\right)$, $T\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-2\right)$



$f'(x) = 2 \cdot \cos(x)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 = 0$

$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 = 0$

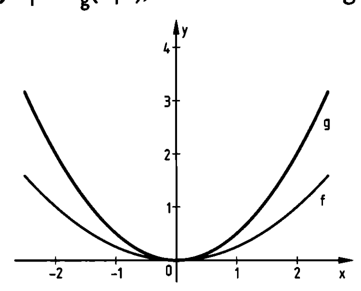
4.5



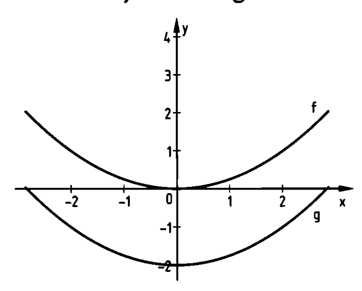
Die Funktion ist streng monoton wachsend im Intervall $]-\infty; -0{,}547...[$ und im Intervall $]0{,}547...; \infty[$. Sie ist streng monoton fallend im Intervall $]-0{,}547...; 0{,}547...[$.
Im Punkt $H(-0{,}547...|2{,}314...)$ hat die Funktion ein lokales Maximum und im Punkt $T(0{,}547...|-0{,}314...)$ ein lokales Minimum.

4.6 – 4.11

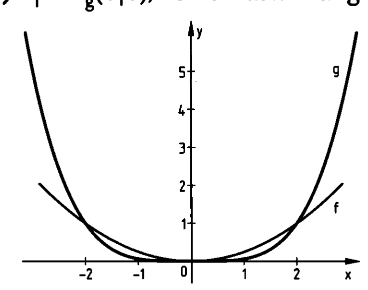
4.6 ***1)*** $T_f = T_g(0|0)$; keine Auswirkung



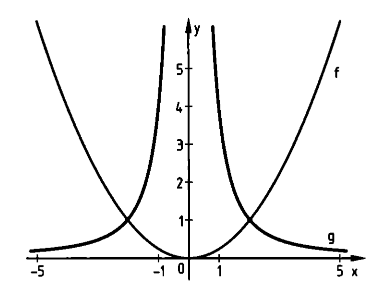
2) $T_f(0|0)$, $T_g(0|-2)$; Verschiebung um −2 in y-Richtung



3) $T_f = T_g(0|0)$; keine Auswirkung



4) $T_f(0|0)$, g(x) hat keinen lokalen Extremwert; aus dem Extremwert wird eine Polstelle



4.7 ***1)***]1,270... ME; 78,729... ME[

2) maximaler Gewinn bei 40 ME; 1 500,00 GE

4.8 1 → B, C   2 → D   3 → A

4.9 1 → D   2 → B   3 → A   4 → C

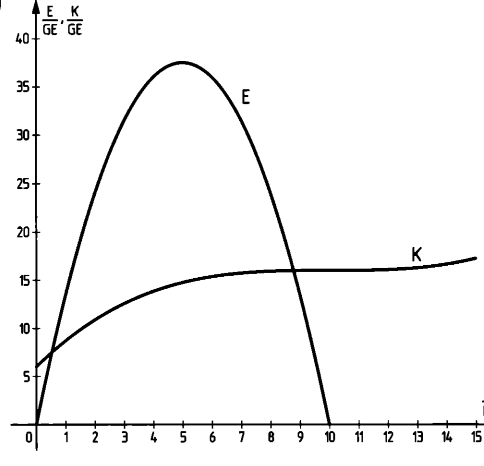
Voraussetzung für ***1)*** und ***4)***: Der Hochpunkt ist gleichzeitig auch global der höchste Punkt der Funktion.

4.10 ***1)*** 8 s   ***2)*** 4 s

3) Abwurfgeschwindigkeit: $f'(0) = 40\,\frac{m}{s}$, Aufprallgeschwindigkeit: $f'(8) = -40\,\frac{m}{s}$

Das unterschiedliche Vorzeichen zeigt, dass die Richtung der beiden Geschwindigkeiten entgegengesetzt ist. Ihr Betrag ist jedoch gleich groß.

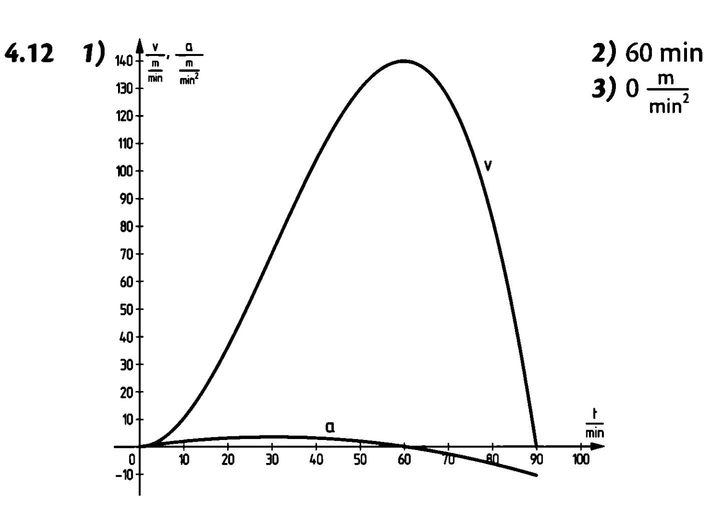
4.11 ***1)***



2) Die Firma erzielt im Bereich zwischen den Schnittpunkten der beiden Funktionen Gewinn. Dort ist der Erlös höher als die Kosten.

3) 4,721... ME; 22,854... GE

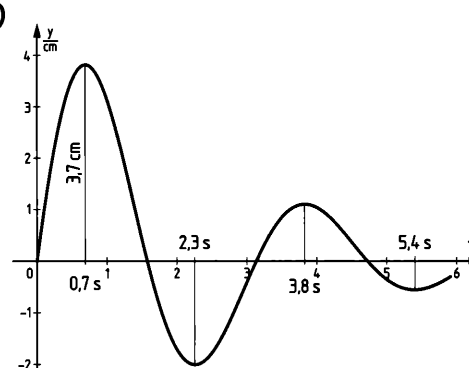
4.12 **1)**



2) 60 min
3) $0\ \frac{m}{min^2}$

4.13 **1)** 2,310... h **2)** 8,006... h

4.14 **1)**



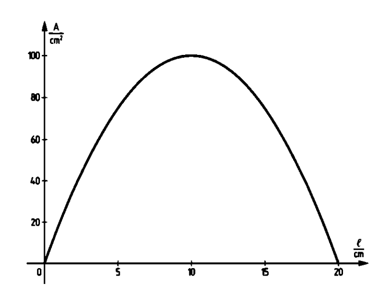
2) lokale Maxima bei t_1 = 0,7 s (0,686...) und
t_3 = 3,8 s (3,828...)
lokale Minima bei t_2 = 2,3 s (2,257...) und
t_4 = 5,4 s (5,399...)
globales Maximum (0,7 s|3,7 cm) (0,686...|3,725...)
3) $0\ \frac{cm}{s}$

4.15 **1)** 45° Der Abschlag- und der Aufprallwinkel sind gleich groß. **2)** 45,871... m

4.19 20 und 20

4.20 $\sqrt{z}$ und $\sqrt{z}$

4.21 **1)** b_1 = 18 cm, A_1 = 36 cm^2;
b_2 = 16 cm, A_2 = 64 cm^2;
b_3 = 14 cm, A_3 = 84 cm^2
2) $A(\ell) = 20\ cm \cdot \ell - \ell^2$,
$\ell \in]0\ cm; 20\ cm[$, ℓ_{max} = 10 cm

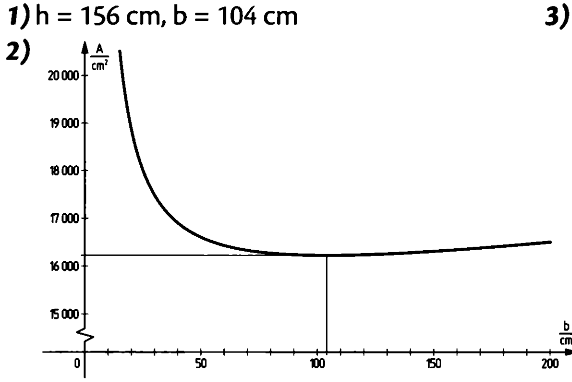


4.22 **1)** ***B)*** beschreibt den Sachverhalt. Die Fläche des rechteckigen Blumenbeets soll möglichst groß werden. Daher wird die Zielfunktion mit der Flächenformel des Rechtecks angegeben.
Der Umfang des Blumenbeets beträgt 6 m. Daher wird als Nebenbedingung die Umfangsformel für ein Rechteck gleich 6 gesetzt.
Bei ***A)*** und ***D)*** ist die Zielfunktion der Umfang des Rechtecks. Möglichst groß soll allerdings die Fläche werden.
Bei ***C)*** ist die Zielfunktion zwar richtig, bei der Nebenbedingung wurde allerdings nicht die Länge des Umfangs von 6 m eingesetzt.

2) ***B)*** ist eine geeignete Zielfunktion. Umformen der Nebenbedingung auf $x = 3 - y$ und einsetzen in die Zielfunktion $A(x, y) = x \cdot y$ ergibt $A(y) = (3 - y) \cdot y$. Ausmultiplizieren ergibt die angegebene Zielfunktion.

4.23 ***1)*** h = 156 cm, b = 104 cm

2)



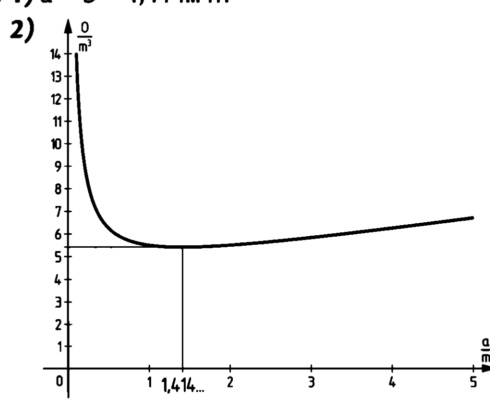
3)

h	156 cm	306 cm	506 cm
b	104 cm	54 cm	34 cm
Papierverbrauch	$1{,}6224\ m^2$	$1{,}6524\ m^2$	$1{,}7204\ m^2$

4.24 ***1)*** A4: x = 40,423... mm, A3: x = 57,168... mm
2) $V_{A4} : V_{A3} = 1 : 2{,}828...$
3) ***A)*** V wird um den Faktor 2,374... größer.
B) V wird um den Faktor 2,625... größer.
C) V wird um den Faktor 6,234... größer.

4.25 **a)** $\ell = b = 30$ m ***b)*** $\ell = 30$ m, b = 15 m

4.26 **a)** ***1)*** a = b = 1,414... m
2)



b) ***1)*** a = b = 1,414... m
2)

4.27 ***1)*** a = h = 12 cm
2) Es sind individuell verschiedene Lösungen möglich. Die Volumina sind kleiner als das bei ***1)*** berechnete Volumen.

4.28 x = y = 1,680... m

4.29 ***1)*** Quadratteilstück: 3,479... m, Dreieckteilstück: 4,520... m
2) Für die zweite Ableitung der Zielfunktion gilt $A''(a) = 2 + \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9} > 0$. Das berechnete Extremum ist daher ein Minimum.

4.30 ***1)*** $\ell = 125$ m, b = 79,577... m ***2)*** $\ell = 120$ m, b = 82,760... m

4.31 644,89 €

4.32 57,735... %

4.33 d = 14,696... cm, h = 5,196... cm

4.34 r : h = 1 : 1

4.35 r = 4,857... cm, h = 0 cm
Die Geschenkverpackung hat die Form einer Kugel.

4.36 *1)* r = 2,121... cm, h = 5,303... cm
2) Für den Inhalt der Mantelfläche gilt $A_M = 2r\pi h$ und nach Verdopplung der Abmessungen $\overline{A_M} = 4r\pi \cdot 2h = 4 \cdot 2r\pi h$. Für den Flächeninhalt von Boden und Deckel gilt $A_B = 2r^2\pi$ und nach Verdopplung der Abmessungen $\overline{A_B} = 2 \cdot 4r^2\pi = 4 \cdot 2r^2\pi$. Bei einer Verdopplung der Abmessungen vervierfacht sich der Flächeninhalt und daher auch die Kosten.

4.37 *1)* a = 221,528... m, h = 156,644... m
2) Cheops-Pyramide: a = 230,33 m, h = 146,6 m, Chephren-Pyramide: a = 215 m, h = 143,5 m, Mykerinos-Pyramide: a = 102,2 m, b = 104,6 m, h = 65,55 m.
Für die Abmessungen der Pyramiden von Gizeh und für die in *1)* ermittelten Abmessungen gilt a : h ≈ 1,5 : 1.

4.38 *1)* 4 527,664... cm^2
2) b = 19 cm oder 41 cm ⇒ $A_{max} = 4\,500\ cm^2$
3) $b \in]0\ cm; 55,\dot{5}\ cm[$
Die Platte wird mit einer Höhe von 100 cm und einer Breite von 45 cm zugeschnitten.

4.39 $h = \frac{H}{2}$. Die Öffnung muss genau auf halber Höhe angebracht sein.

4.42 *1)* 400 m
2) Ingenieur Schmalhand hat Recht, wenn er als Spiegelachse das Ufer des Kanals, an dem der Punkt X liegt, wählt. Spiegelt man sowohl R als auch W an diesem geradlinigen Ufer, entsteht ein gleichschenkliges Trapez mit den Eckpunkten W', W, R und R'. Die kürzeste Verbindung zwischen den Eckpunkten R' und W ist die Diagonale R'W. X ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Die Diagonalen im gleichschenkligen Trapez sind gleich lang, daher ist auch der Abstand von X nach R' gleich dem Abstand von X nach R.

4.43 *1)* x = 4,285... km
2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 34{,}992...°$

$$x = 4{,}285... = \frac{30}{7} \Rightarrow \alpha_1 = \arctan\left(\frac{4}{10 - \frac{30}{7}}\right) = \arctan\left(\frac{28}{40}\right) = \arctan(0{,}7) \text{ bzw.}$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{3}{\frac{30}{7}}\right) = \arctan\left(\frac{21}{30}\right) = \arctan(0{,}7).$$ Die beiden Werte stimmen überein.

4.44 (7,402...|7,467...)

4.45 *1)* 23,772... min
2) 3,754... m von A entfernt
3) Susi ist, obwohl ihre Geschwindigkeit beim Radfahren um 2 $\frac{km}{h}$ geringer ist, um 26,787... s schneller im Ziel als Wolfgang.

4.46 15,588... cm

4.48 *a)* 60° *b)* 68,529...°

4.49 70,528...°

4.50 3,325... m

4.51 0,916... m

4.52 ℓ = 2,886... cm, b = 2,5 cm

4.53 h = 8,021... m

4.54 0,926... m

4.57 15 Ziegen

4.58 b = 37,527... cm, h = 53,072... cm

4.59 $R_1 = R_2 = 135\ \Omega$

4.60 78,690... %

4.61 $\alpha = \arctan(\mu)$

4.62 4 Stück

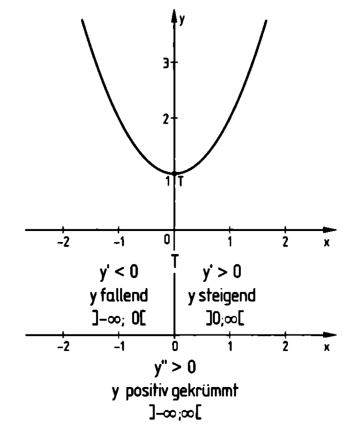
4.63 Quader mit quadratischer Grundfläche: a = 1,732... cm, h = 3,464... cm

4.64 0,409... · s Meter von der schwächeren Lichtquelle entfernt

4.65 h = 56,568... cm

4.66 ***1)*** obere Kurve steigend, untere Kurve fallend; beide Kurven gleich gekrümmt
2) obere Kurve steigend, untere Kurve fallend; beide Kurven verschieden gekrümmt
3) obere Kurve fallend, untere Kurve fallend; beide Kurven gleich gekrümmt

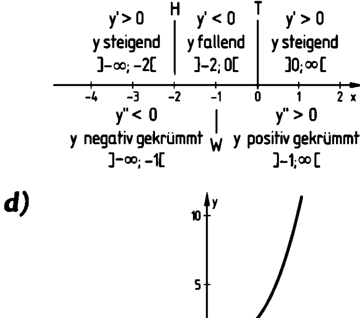
4.68 ***a)***



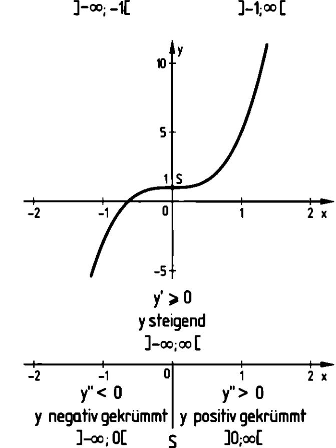
b)

y' > 0
y steigend
]-∞; 1,5[
H
y' < 0
y fallend
]1,5;∞[
y'' < 0
y negativ gekrümmt
]-∞;∞[

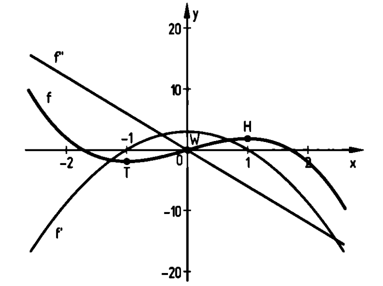
c)



d)



4.69 a)



T(−1|−2), im Tiefpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist größer null.
W(0|0), im Wendepunkt ist die zweite Ableitung null.
H(1|2), im Hochpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist kleiner null.

b)

T(−2|−3), im Tiefpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist größer null.
W(−1|−1), im Wendepunkt ist die zweite Ableitung null.
H(0|1), im Hochpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist kleiner null.

c)

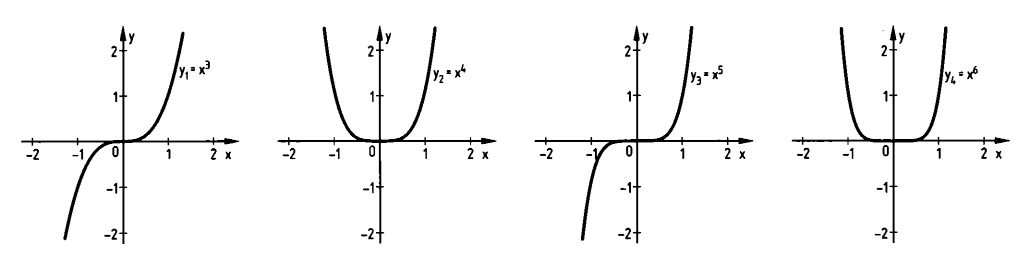
H(0|1), im Hochpunkt sind die erste und die zweite Ableitung null, aber das Monotonieverhalten ändert sich.
W(3|−31,4), im Wendepunkt ist die zweite Ableitung null.
T(4|−50,2), im Tiefpunkt ist die erste Ableitung null und die zweite Ableitung ist größer null.

4.70 f ⟶ B f ist eine Polynomfunktion 3. Grads, ihre Ableitung daher eine Polynomfunktion 2. Grads. Die Steigung von f ist an den Stellen −2 und 2 gleich null, die Ableitung hat an den Stellen −2 und 2 Nullstellen. f ist im Bereich]−∞; 0[negativ gekrümmt und im Bereich]0, ∞[positiv gekrümmt, die Ableitung ist im Bereich]−∞; 0[streng monoton fallend und im Bereich]0, ∞[streng monoton steigend. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik B.

g ⟶ C g ist eine Polynomfunktion 2. Grads, ihre Ableitung daher eine lineare Funktion. Die Steigung von g ist an der Stelle 2 gleich null, die Ableitung hat an der Stelle 2 eine Nullstelle. g ist im gesamten Definitionsbereich positiv gekrümmt, die Ableitung ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik C.

h ⟶ A h ist eine Polynomfunktion 3. Grads, ihre Ableitung daher eine Polynomfunktion 2. Grads. Die Steigung von h ist an der Stelle 1 gleich null, die Ableitung hat an der Stelle 1 eine Nullstelle. h ist im Bereich]−∞; 1[positiv gekrümmt und im Bereich]1, ∞[negativ gekrümmt, die Ableitung ist im Bereich]−∞; 1[streng monoton steigend und im Bereich]1, ∞[streng monoton fallend. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik A.

4.71



$y_1'(0) = 0; y_1''(0) = 0$	$y_2'(0) = 0; y_2''(0) = 0$	$y_3'(0) = 0; y_3''(0) = 0$	$y_4'(0) = 0; y_4''(0) = 0$
Sattelpunkt S(0|0)	Extrempunkt E(0|0)	Sattelpunkt S(0|0)	Extrempunkt E(0|0)

y_1 und y_3: Das Monotonieverhalten ändert sich an der Stelle $x = 0$ nicht. Daher liegt ein Sattelpunkt vor.

y_2 und y_4: Das Monotonieverhalten ändert sich an der Stelle $x = 0$. Daher liegt ein Extrempunkt vor.

4.72 f: $E \rightarrow f'$, $D \rightarrow f''$

f ist eine Polynomfunktion 2. Grads, ihre erste Ableitung f′ ist daher eine lineare Funktion. Die Steigung von f an der Stelle $x = 0{,}5$ ist null. f′ muss daher an der Stelle $x = 0{,}5$ eine Nullstelle aufweisen. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik E.
Die Ableitung der linearen Funktion f′ ist eine konstante Funktion. f′ hat die Steigung $k = 4$. Die zweite Ableitung f″ ist daher $y = 4$. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik D.

g: $C \rightarrow g'$, $H \rightarrow g''$

g ist eine Polynomfunktion dritten Grads, ihre erste Ableitung g′ ist daher eine Polynomfunktion 2. Grads. g hat bei $x_1 \approx -1{,}5$ und $x_2 \approx 0{,}2$ eine Extremstelle. g′ muss daher an diesen Stellen jeweils eine Nullstelle aufweisen. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik C.
Die Ableitung der Polynomfunktion g′ ist eine lineare Funktion. Die Extremstelle von g′ und die Nullstelle von g″ müssen übereinstimmen. g′ ist positiv gekrümmt. Daher ist g″ eine lineare Funktion mit $k > 0$. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik H.

h: $G \rightarrow h'$, $B \rightarrow h''$

h ist eine Polynomfunktion dritten Grads, ihre erste Ableitung h′ ist daher eine Polynomfunktion 2. Grads. h hat bei $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 2{,}7$ eine Extremstelle. h′ muss daher an diesen Stellen jeweils eine Nullstelle aufweisen. Die Steigung von h ist im Bereich $]-\infty; 0[$ negativ. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik G.
Die Ableitung der Polynomfunktion h′ ist eine lineare Funktion. Die Extremstelle von h′ und die Nullstelle von h″ müssen übereinstimmen. h′ ist negativ gekrümmt. Daher ist h″ eine lineare Funktion mit $k < 0$. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik B.

4.73 ***B)*** Die Nullstellen der Geschwindigkeitsfunktion sind die Extremstellen der Wegfunktion.

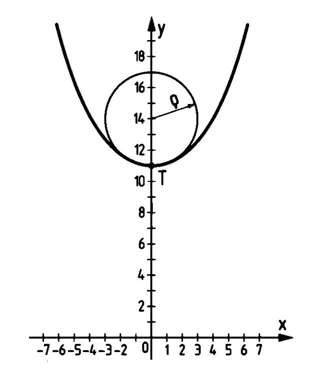
4.74 ***A)*** Trifft nicht zu. Sie kann auch einen Sattelpunkt markieren.
B) Trifft nicht zu. Er kann auch von einer Rechts- in eine Linkskurve übergehen.
C) Trifft zu. ***D)*** Trifft zu. ***E)*** Trifft zu.

4.75 ***A)*** Falsch. f könnte an der Stelle $x = 4{,}2$ auch einen Sattelpunkt haben.
B) Richtig. Für den Hochpunkt bei $x = 1{,}8$ gilt $f''(1{,}8) < 0$, dh. die Krümmung ist negativ.
C) Falsch. Wegen $f(3) = 0$ hat f an der Stelle $x = 3$ eine Nullstelle. $f''(3) = 0$ ist aber keine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt. f könnte an der Stelle $x = 3$ auch eine Extremstelle haben.
D) Falsch. Wenn f′ bei $x = 1{,}5$ eine negative Steigung hat, dann wird die Steigung von f in der unmittelbaren Umgebung von $x = 1{,}5$ kleiner. Eine Aussage über das Monotonieverhalten von f kann daraus aber nicht abgeleitet werden.

4.76 ***A)*** richtig ***B)*** falsch ***C)*** falsch

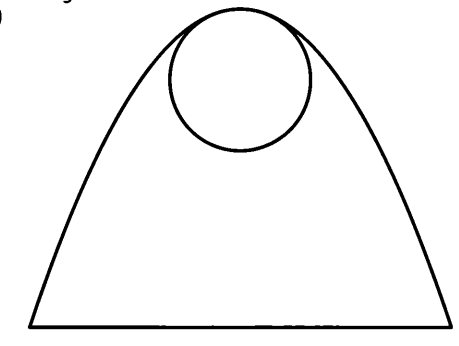
4.77 f: $f' \rightarrow E$, $f'' \rightarrow D$
f hat eine Polstelle bei $x = 0$. Daher müssen auch die ersten beiden Ableitungen von f an dieser Stelle eine Polstelle aufweisen.
Die Steigung von f ist negativ. Für die Funktionswerte von f′ muss daher $f' < 0$ gelten. Dieser Beschreibung entspricht Grafik E.
Die Steigung von f′ ist für $x < 0$ negativ und für $x > 0$ positiv. Dieser Beschreibung entspricht Grafik D.
g: $g' \rightarrow A$, $g'' \rightarrow F$
g hat bei $x_1 = -2$ bzw. bei $x_2 = 2$ eine Polstelle. Daher müssen auch die ersten beiden Ableitungen von g an diesen Stellen Polstellen aufweisen.
g hat einen Extremwert bei $x = 0$, daher muss g′ bei $x = 0$ eine Nullstelle aufweisen. Die Steigung von g ist für $x < 0$ positiv und für $x > 0$ negativ. Dieser Beschreibung entspricht Grafik A.
Die Steigung von g′ ist für $x < -2$ positiv, für $x \in]-2; 2[$ negativ und für $x > 2$ positiv. Dieser Beschreibung entspricht Grafik F.
h: $h' \rightarrow C$, $h'' \rightarrow H$
h hat bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 1$ eine Polstelle. Daher müssen auch die ersten beiden Ableitungen von h an diesen Stellen Polstellen aufweisen.
Die Steigung von h ist im gesamten Definitionsbereich negativ. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik C.
h′ hat an der Stelle $x = 0$ einen Extremwert. h″ muss an dieser Stelle eine Nullstelle aufweisen.
Die Steigung von h′ ist für $x < -1$ negativ und für $x > 1$ positiv. Dieser Beschreibung entspricht die Grafik H.

4.80



$\kappa(0) = \frac{1}{3}$, $\rho = 3$

4.81 ***1)*** $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 3$
2) $\rho = \frac{2}{3}$m
3)



4.82 Perlen mit kleinem Durchmesser berühren das Glas in genau einem Punkt, dem Scheitelpunkt des Glases. Die größte Perle mit dieser Eigenschaft hat einen Durchmesser von $d = \frac{1}{3}$ dm. Ist der Perlendurchmesser größer als $\frac{1}{3}$ dm, dann berührt die Perle das Glas längs eines horizontalen Kreises.

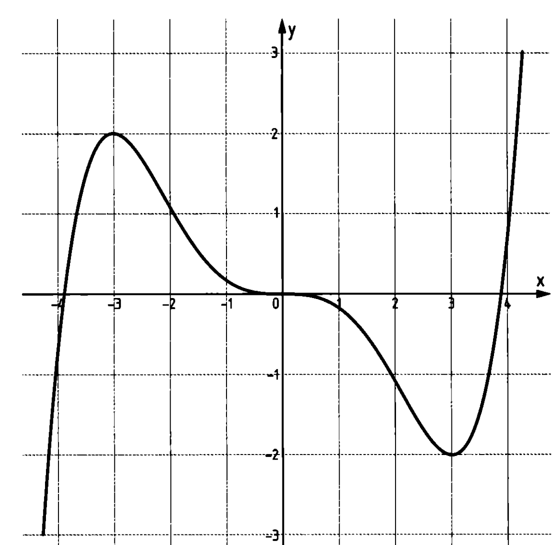
4.83 vor der dritten Kurve
Die Fragestellung im Buch müsste lauten: Ein Warnschild soll vor der Kurve mit der größten Krümmung aufgestellt werden.

4.84 Es gilt: $y = -a \cdot x^2 + c$, $y' = -2a \cdot x$, $y'' = -2a$
Der Scheitel dieser Parabel, ermittelt durch $y' = 0$, liegt an der Stelle $x = 0$.

Für die Krümmung gilt $\kappa(x) = \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}} = \frac{-2a}{\sqrt{(1 + (-2a \cdot x)^2)^3}}$.

Einsetzen von $x = 0$ ergibt $\kappa(0) = \frac{-2a}{\sqrt{(1 + 0^2)^3}} = \frac{-2a}{\sqrt{(1)^3}} = \frac{-2a}{1} = -2a = y''$.

4.86

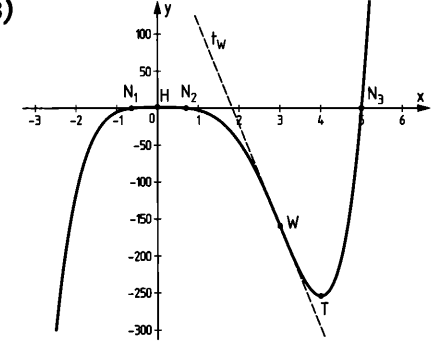


Die Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen. Die Funktion ist eine ungerade Funktion. Sie hat drei Nullstellen $N_1(-3{,}9|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(3{,}9|0)$, zwei Extremwerte $H(-3|2)$ und $T(3|-2)$ und einen Wendepunkt $W(0|0)$, der zugleich Nullstelle ist. Die Wendetangente ist die x-Achse.

4.87 ***a)*** $H(-1{,}\dot{6}|14{,}\dot{8}1\dot{4})$, $T(3|-36)$, $W(0{,}\dot{6}|-10{,}\dot{5}9\dot{2})$
b) $H(-0{,}816...|-0{,}911...)$, $T(0{,}816...|-3{,}088...)$, $W(0|-2)$
c) $H(-2|17)$, $T(2|-15)$, $W(0|1)$

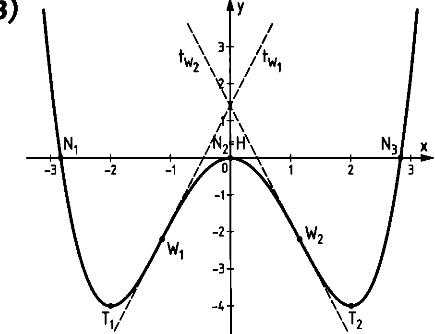
4.88 ***a) 1)*** maximal 5 Nullstellen, 4 Extrempunkte, 3 Wendepunkte
2) 1) $D_f = \mathbb{R}$
2) nicht symmetrisch
3) $N_1(-0{,}648...|0)$, $N_2(0{,}694...|0)$, $N_3(4{,}998...|0)$
4) $H(0|1)$, $T(4|-255)$
5) $W(3|-161)$
6) t_W: $y = -135x + 244$

3)



b) 1) maximal 4 Nullstellen, 3 Extrempunkte, 2 Wendepunkte
2) 1) $D_f = \mathbb{R}$
2) gerade Funktion
3) $N_1(-2{,}828...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2{,}828...|0)$
4) $T_1(-2|-4)$, $H(0|0)$, $T_2(2|-4)$
5) $W_1(-1{,}154...|-2{,}\dot{2})$, $W_2(1{,}154...|-2{,}\dot{2})$
6) t_{W_1}: $y = 3{,}079... \cdot x + 1{,}\dot{3}$,
t_{W_2}: $y = -3{,}079... \cdot x + 1{,}\dot{3}$

3)



c) ***1)*** maximal 3 Nullstellen, 2 Extrempunkte, 1 Wendepunkt

2) 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) nicht symmetrisch

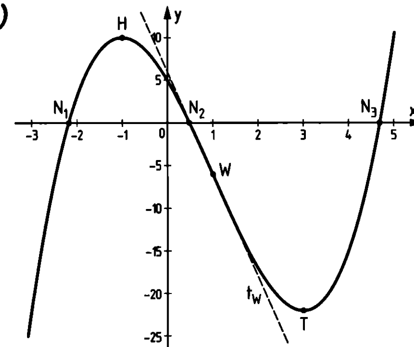
3) $N_1(-2{,}180...|0)$, $N_2(0{,}488...|0)$, $N_3(4{,}691...|0)$

4) $H(-1|10)$, $T(3|-22)$

5) $W(1|-6)$

6) t_w: $y = -12x + 6$

3)



d) ***1)*** maximal 4 Nullstellen, 3 Extrempunkte, 2 Wendepunkte

2) 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) nicht symmetrisch

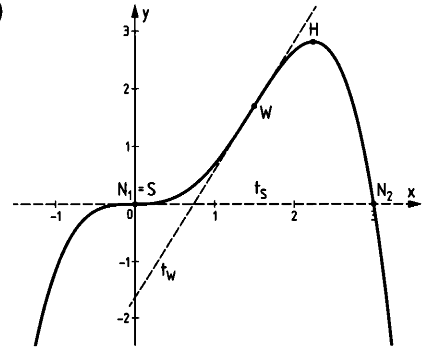
3) $N_1(0|0)$, $N_2(3|0)$

4) $H(2{,}25|2{,}847...)$

5) $S(0|0)$, $W(1{,}5|1{,}687\,5)$

6) t_s: $y = 0$, t_w: $y = 2{,}25x - 1{,}6875$

3)



e) ***1)*** maximal 3 Nullstellen, 2 Extrempunkte, 1 Wendepunkt

2) 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) nicht symmetrisch

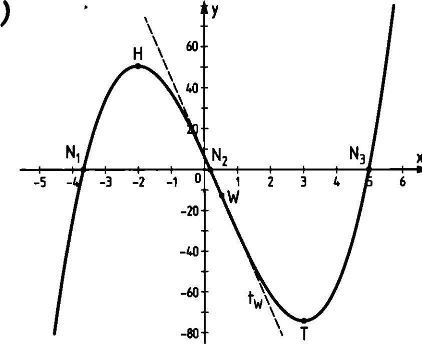
3) $N_1(-3{,}667...|0)$, $N_2(0{,}191...|0)$, $N_3(4{,}976...|0)$

4) $H(-2|51)$, $T(3|-74)$

5) $W(0{,}5|-11{,}5)$

6) t_w: $y = -37{,}5x + 7{,}25$

3)



f) ***1)*** maximal 5 Nullstellen, 4 Extrempunkte, 3 Wendepunkte

2) 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) ungerade Funktion

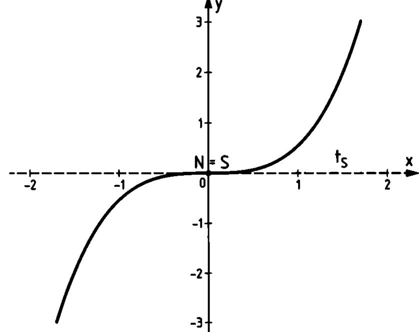
3) $N(0|0)$

4) keine Extrempunkte

5) $S(0|0)$

6) t_s: $y = 0$

3)



4.89 ***a)***

1) $D_f = \mathbb{R}$	Die Definitionsmenge einer Polynomfunktion sind die reellen Zahlen.
2) nicht symmetrisch	Die Funktion enthält gerade und ungerade Exponenten.
3) $N_1(2\mid0)$, $N_2(8\mid0)$	Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ ergibt $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.
4) $H(4\mid6)$, $T(8\mid0)$	Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. $f(4) = 6$ bzw. $f(8) = 0$ ergibt die Extrempunkte $E_1(4\mid6)$ bzw. $E_2(8\mid0)$. $f''(4) = -\frac{9}{4} < 0 \Rightarrow E_1$ ist ein Hochpunkt. $f''(8) = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow E_2$ ist ein Tiefpunkt.
5) $W(6\mid3)$	Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $x = 6$. $f(6) = 3$ ergibt den Punkt $W(6\mid3)$. $f'''(6) = \frac{9}{8} \neq 0 \Rightarrow W$ ist Wendepunkt.
6) t_w: $y = -\frac{9}{4}x + \frac{33}{2}$	Die erste Ableitung an der Stelle des Wendepunkts ergibt die Steigung der Wendetangente $k = f'(6) = -\frac{9}{4}$. Einsetzen der Koordinaten des Wendepunkts in die Gleichung der Wendetangente ergibt den y-Achsenabschnitt der Wendetangente: $3 = -\frac{9}{4} \cdot 6 + d \Rightarrow d = \frac{33}{2}$.

b) bis ***f)*** Dokumentation analog zu ***a)***

b) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_1(-0{,}215...\mid0)$, $N_2(2{,}752...\mid0)$, $N_3(4{,}962...\mid0$
4) $H(1\mid5)$, $T(4\mid-3)$ 5) $W(\frac{5}{2}\mid1)$ 6) t_w: $y = -4x + 11$

c) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(-2\mid0)$
4) $H(-1{,}182...\mid1{,}648...)$, $T(-0{,}084...\mid0{,}987...)$ 5) $W(-0{,}6\dot{3}\mid1{,}318...)$ 6) t_w: $y = -0{,}903...x + 0{,}745...$

d) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_1(0\mid0)$, $N_2(6\mid0)$
4) $H(2\mid5{,}925...)$, $T(6\mid0)$ 5) $W(4\mid2{,}962...)$ 6) t_w: $y = -2{,}\dot{2}x + 11{,}851...$

e) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) keine reellen Nullstellen
4) $T_1(-0{,}871...\mid1{,}814...)$, $H(0{,}715...\mid8{,}432)$, $T_2(2{,}406\mid0{,}585...)$ 5) $W_1(-0{,}196...\mid4{,}768...)$, $W_2(1{,}696...\mid4{,}058...)$ 6) t_{w1}: $y = 6{,}408...x + 6{,}027...$, t_{w2}: $y = -7{,}158...x + 16{,}201...$

f) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_1(0\mid0)$, $N_2(1{,}018...\mid0)$
4) $T(0{,}609...\mid-1{,}012...)$ 5) $W_1(-0{,}9375\mid1{,}632...)$ $W_2(0\mid0)$ 6) t_{w1}: $y = -1{,}081...x + 0{,}617...$, t_{w2}: $y = -2{,}4x$

4.90 ***1)*** 3 505 Besucher

2) Von Beginn der Veranstaltung bis ca. 1 Stunde (0,989...) nach Beginn nimmt die Zahl der Besucher ab. Danach nimmt die Zahl der Besucher zu. Ab ca. 4,8 Stunden (4,844...) nach Beginn der Veranstaltung nimmt die Zahl der Besucher wieder ab bis sie ca. 7,3 Stunden (7,318...) nach Beginn null erreicht. Nach diesem Zeitpunkt nimmt bis zum Ende der Veranstaltung kein Besucher mehr an der Messe teil. (Die laut Graph auftretenden negativen Besucherzahlen sind nicht möglich.)

3) um 14:51 Uhr; 8 088 Besucher

4) Unmittelbar vor Beginn um 10:00 Uhr, falls es keinen Kartenvorverkauf gab (4 565 Besucher zu Beginn der Veranstaltung), oder um 12:55 Uhr, da zu diesem Zeitpunkt die Zunahme der Besucher am größten ist ($x''(2{,}91\dot{6}) = 0 \Rightarrow x'(2{,}91\dot{6})$ ist maximal).

5) von ca. 12:28 Uhr bis ca. 16:28 Uhr

4.91 ***1)*** 24 cm am Beginn der Messung bzw. 78 cm drei Tage nach Beginn der Messung

2) am 6. Tag; 120 cm hoch

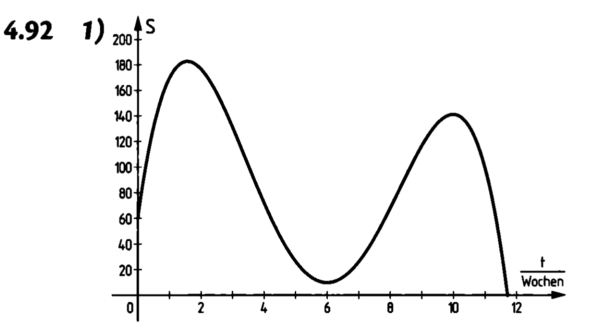
3) 24,370... $\frac{\text{cm}}{\text{Tag}}$

4) ca. 2,5 Tage (2,535...) nach Beginn der Messung

5) nach ca. 3 Tagen (3,083...) bzw. nach ca. 9 Tagen (8,916...)

6) am 12. Tag (11,196...)

4.92 ***1)***



Nach dem erstmaligen Einsatz steigt die Zahl weiterhin an. Nach ca. 2 Wochen nimmt die Anzahl ab, um nach ca. 6 Wochen erneut anzusteigen. Nach ca. 10 Wochen nimmt die Anzahl erneut ab, bis nach ca. 12 Wochen keine Schädlinge mehr vorhanden sind.

2) 60 Schädlinge
3) nach 6 Wochen; 10 Schädlinge
4) 68 Schädlinge ($67,4\dot{2}$)
5) nach 11,727... Wochen

4.93 ***1)*** 80 Personen
2) 17 Kunden (16,7) weniger
3) $6{,}1\,\frac{\text{Kunden}}{\text{h}}$ mehr
4) um 19:00 Uhr; 3 Kunden
5) um ca. 17:00 Uhr (7,959... h nach der Eröffnung); 148 Kunden (148,038...)
6) Um 19:00 Uhr; der Betrag der Ableitungsfunktion ist um 19:00 Uhr am größten.
7) von ca. 15:10 Uhr (6,154... h nach der Eröffnung) bis ca. 18:15 Uhr (9,223... h nach der Eröffnung)

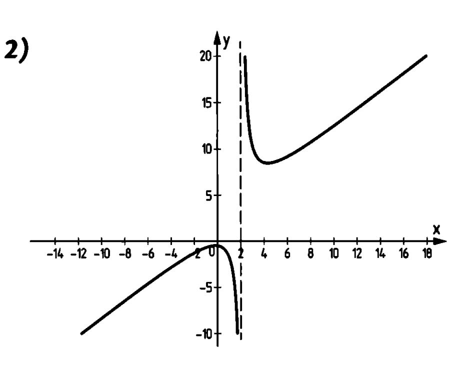
4.94 ***1)*** an der Stelle x = 46,538... m; 12,786... m hoch
2) bei x = 34,888... m
3) 0,4358
4) linker Rand 32,325...°, rechter Rand 67,004...°
5) bei x = 1,846... m bzw. bei x = 59,185... m

4.95 ***1)*** –
2) Die Koordinaten von T und H ergeben für das Symmetriezentrum die Koordinaten
$x_w = \frac{x_T + x_H}{2} = \frac{1 + (-2)}{2} = 0{,}5$ bzw. $y_w = \frac{y_T + y_H}{2} = \frac{0 + 3}{2} = 1{,}5$.
Das sind genau die Koordinaten des Wendepunkts $W(-0{,}5|1{,}5)$.

4.98 Polstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$, eine weitere Asymptote mit $k > 0$ und $d = 0$
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$
ungerade
$N(0|0)$
Hochpunkt bei $x_H \approx -1{,}5$, $y_H \approx -0{,}7$, Tiefpunkt bei $x_T \approx 1{,}5$, $y_T \approx 0{,}7$
$W(0|0)$
$]-\infty;x_H[$ streng monoton steigend, $]x_H;-1[$ streng monoton fallend, $]-1;1[$ streng monoton fallend, $]1;x_T[$ streng monoton fallend, $]x_H;\infty[$ streng monoton steigend
$]-\infty;-1[$ negativ gekrümmt, $]-1;0[$ positiv gekrümmt, $]0;1[$ negativ gekrümmt, $]1;\infty[$ positiv gekrümmt

4.99 ***1)*** Die Definitionsmenge der Funktion ist $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Anstelle des senkrechten Verlaufs bei $x = 2$ müsste der Graph an dieser Stelle unterbrochen sein. Das Grafikprogramm zeigt die Funktion ohne Unterbrechung an, weil der spezielle Verlauf von Graphen bei Unstetigkeitsstellen bei der Programmierung nicht entsprechend berücksichtigt wurde.

2)



4.100 ***a)***
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) $H(0|-0{,}25)$ 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = -2$, a_2: $x = 2$, a_3: $y = 0$

b)
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) $T(0|0{,}\dot{2})$ 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = -3$, a_2: $x = 3$, a_3: $y = 0$

c)
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ 2) nicht symmetrisch 3) keine Nullstellen
4) keine 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = 1$, a_2: $y = 0$

d)
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{4\}$ 2) nicht symmetrisch 3) keine Nullstellen
4) keine Extrempunkte 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = 4$, a_2: $y = 0$

4.101 ***a)***
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$ 2) ungerade Funktion 3) $N(0|0)$
4) keine Extrempunkte 5) $W(0|0)$ 6) a_1: $x = -2$, a_2: $x = 2$, a_3: $y = 0$

b)
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$ 2) gerade Funktion 3) $N(0|0)$
4) $H(0|0)$ 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = -1$, a_2: $x = 1$, a_3 : $y = 1$

c)
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(1|0)$
4) keine 5) $W(0{,}362...|0{,}164...)$ 6) a_1: $x = -2$, a_2: $x = 2$, a_3: $y = 0$

d)
1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) $H(0|-1)$ 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = -1$, a_2: $x = 1$, a_3: $y = 1$

4.102 ***a)***
1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) $H(0|1)$ 5) $W_1(-0{,}577...|0{,}75)$, $W_2(0{,}577...|0{,}75)$ 6) a: $y = 0$

b)
1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) ungerade Funktion 3) $N(0|0)$
4) $T(-1|-0{,}5)$, $H(1|0{,}5)$ 5) $W_1(-1{,}732...|-0{,}433...)$, $W_2(0|0)$, $W_3(1{,}732...|0{,}433...)$
6) a : $y = 0$

c)
1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(1|0)$
4) $H(-1|2)$, $T(1|0)$ 5) $W_1(-1{,}732...|1{,}866...)$, $W_2(0|1)$, $W_3(1{,}732...|0{,}133...)$
6) a : $y = 1$

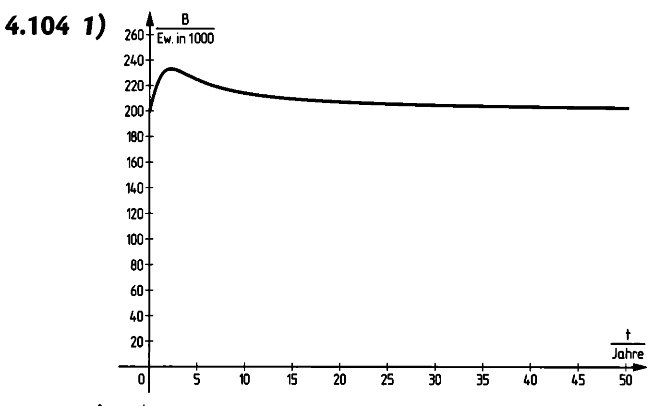
d)
1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) ungerade Funktion 3) $N(0|0)$
4) keine 5) $W_1(-1{,}732...|-1{,}299...)$, $S(0|0)$, $W_2(1{,}732...|1{,}299...)$
6) a : $y = x$

4.103 f: $H(0|2)$, $W_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\middle|\frac{3}{2}\right)$, $W_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\middle|\frac{3}{2}\right)$, t_{w1}: $y = \frac{\sqrt{27}}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$, t_{w2}: $y = -\frac{\sqrt{27}}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$

g: $H(0|2)$, $W_1\left(-2\middle|\frac{3}{2}\right)$, $W_2\left(2\middle|\frac{3}{2}\right)$, t_{w1}: $y = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$, t_{w2}: $y = -\frac{3}{8} \cdot x + \frac{9}{4}$

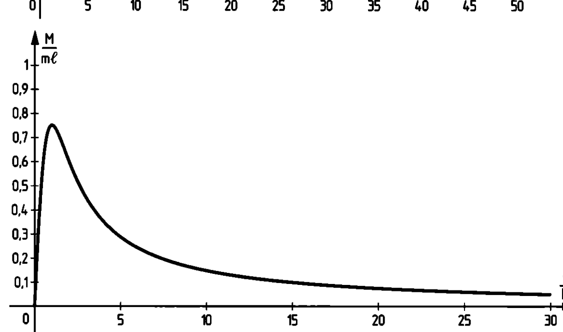
Die Koordinaten der Extrempunkte sind gleich. Die y-Koordinaten der Wendepunkte sind gleich. Die y-Achsenabstände der Wendetangenten sind gleich.

4.104 ***1)***



2) nach 2,236... Jahren;
ca. 233 500 Bewohner (233 541,019...)

4.105 ***1)***



2) nach 1 Stunde

3) Der Graf nähert sich der t-Achse asymptotisch, der Funktionswert ist auch für große Werte für t größer null. Die Wirkstoffmenge wird mit der Zeit immer kleiner, erreicht aber (theoretisch) nie den Wert null.

4.106 ***1)*** 1) D_E: $|x| \neq a$, $\ell \neq 0$

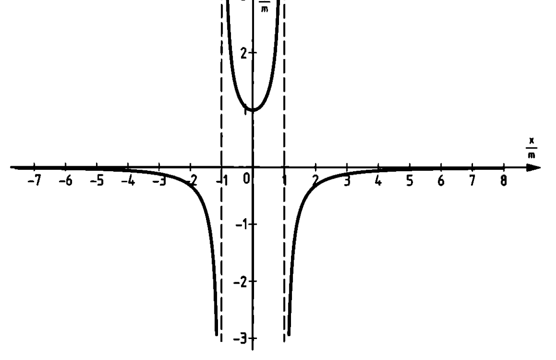
2) gerade Funktion

3) keine Nullstellen

4) $T\left(0 \middle| \frac{Q}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell \cdot a}\right)$

5) keine Wendepunkte

6) a_1: $x = -a$, a_2: $x = a$, a_3: $y = 0$



2) Die gegebene Funktion E(x) ist eine gebrochen rationale Funktion. Der Grad des Zählerpolynoms ist null, der Grad des Nennerpolynoms ist 2.
Wegen Grad des Zählerpolynoms < Grad des Nennerpolynoms ist die x-Achse Asymptote der Funktion.
Die elektrische Feldstärke E geht für $x \to \pm\infty$ gegen null und es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} E(x) = 0$.

4.109 ***a)*** 1) $D = \mathbb{R}$ 2) ungerade Funktion 3) $N_k(k \cdot \pi | 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

4) $H_k\left(\frac{4k+1}{2} \cdot \pi \middle| 1\right)$, $T_k\left(\frac{4k+3}{2} \cdot \pi \middle| -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 5) $W_k(k \cdot \pi | 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

b) 1) $D = \mathbb{R}$ 2) gerade Funktion 3) $N_k\left(\frac{2k+1}{4} \cdot \pi \middle| 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

4) $H_k(k \cdot \pi | 1)$, $T_k\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi \middle| -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 5) $W_k\left(\frac{2k+1}{4} \cdot \pi \middle| 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

c) 1) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 2) ungerade Funktion 3) $N_k\left(\frac{2k+1}{2}\cdot\pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $H_1(-2{,}798...|0{,}336...)$, $H_2(6{,}121...|0{,}161...)$, $H_3(-9{,}317...|0{,}106...)$, $H_4(12{,}486...|0{,}079...)$, ... $T_1(2{,}798...|-0{,}336...)$, $T_2(-6{,}121...|-0{,}161...)$, $T_3(9{,}317...|-0{,}106...)$, $T_4(-12{,}486...|-0{,}079...)$, ...
5) $W_1(4{,}222...|-0{,}111...)$, $W_2(-4{,}222...|0{,}111...)$, $W_3(7{,}587...|0{,}034...)$, ...

4.110 ***a)*** 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $T_k\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\middle|-1{,}414...\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; $H_k\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\middle|1{,}414...\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 5) $W_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

b) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) gerade Funktion 3) $N_k(k\pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $T_k(k\pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$; $H_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\middle|1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 5) $W_k\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

c) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) ungerade Funktion
3) $N_{k_1}(k_1\pi|0)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $N_{k_2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi\middle|0\right)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$; $N_{k_3}\left(\frac{4\pi}{3} + 2k_3\pi\middle|0\right)$, $k_3 \in \mathbb{Z}$
4) $H_{k_1}(0{,}935... + 2k_1\pi|1{,}760...)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $H_{k_2}(3{,}709... + 2k_2\pi|0{,}369...)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$;
$T_{k_1}(2{,}573... + 2k_1\pi|-0{,}369...)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $T_{k_2}(5{,}347... + 2k_2\pi|-1{,}760...)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$
5) $W_{k_1}(k_1\pi|0)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $W_{k_2}(1{,}696... + 2k_2\pi|0{,}744...)$, $k_2 \in \mathbb{Z}$;
$W_{k_3}(4{,}587... + 2k_3\pi|-0{,}744...)$, $k_3 \in \mathbb{Z}$;

4.111 ***a)*** 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) ungerade Funktion 3) $N(0|0)$
4) keine Extrempunkte 5) $W_k(2k\pi|y(2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$; $S_k(\pi + 2k\pi|y(\pi + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$

b) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(0{,}739...|0)$
4) keine Extrempunkte
5) $W_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\middle|y\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; $S_k\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\middle|y\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

c) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(-1{,}934...|0)$
4) keine Extrempunkte 5) $S_k(2k\pi|y(2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$; $W_k(\pi + 2k\pi|y(\pi + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$

4.112 ***a)*** 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) $T(0|1)$ 5) keine Wendepunkte

b) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(0|0)$
4) $T(-1|-0{,}367...)$ 5) $W(-2|-0{,}270...)$ 6) $a: y = 0$

c) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(0|0)$
4) $H(-2|0{,}541...)$, $T(0|0)$ 5) $W_1(-3{,}414...|0{,}383...)$, $W_2(-0{,}585...|0{,}191...)$ 6) $a: y = 0$

4.113 ***a)*** 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(0|0)$
4) $H(1|0{,}367...)$ 5) $W(2|0{,}270...)$ 6) $a: y = 0$

b) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(0|0)$
4) $T(0|0)$, $H(1|0{,}135....)$ 5) $W_1(0{,}292...|0{,}047...)$, $W_2(1{,}707...|0{,}095...)$ 6) $a: y = 0$

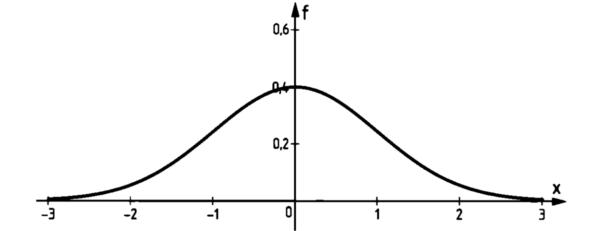
c) 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(-2|0)$
4) $T(-4|-0{,}270...)$ 5) $W(-6|-0{,}199...)$ 6) $a: y = 0$

4.114 ***a)*** 1) $D_f = \mathbb{R}^+$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(1|0)$
4) $T\left(\frac{1}{e}\middle|-\frac{1}{e}\right)$ 5) keine Wendepunkte

b) 1) $D_f = \mathbb{R}^+$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(1|0)$
4) $T(0{,}606...|-0{,}183...)$ 5) $W(0{,}223...|-0{,}074...)$

c) 1) $D_f = \mathbb{R}^+$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(e|0)$
4) $H(1|1)$ 5) keine Wendepunkte

4.115 1) $D_f = \mathbb{R}$
2) gerade Funktion
3) keine Nullstellen
4) $H\left(0\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$
5) $W_1\left(-1\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$, $W_2\left(1\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$



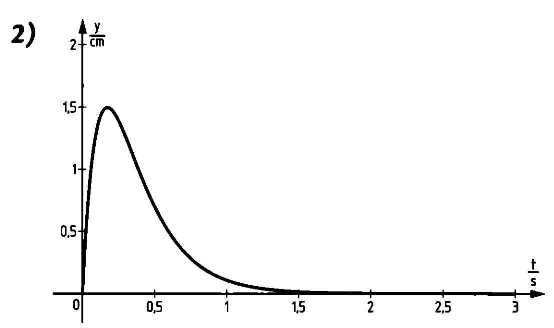
f(x) ist die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung. Ihr Graph heißt Gauß'sche Glockenkurve.

4.116 ***1)*** 1,5 ... maximale Abweichung des Wasserstands von der mittleren Wasserstandshöhe in Meter
$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{12}$ ... alle 12 Stunden wiederholt sich der Vorgang
1,8 ... mittlere Wasserstandshöhe in Meter
2) jeden Tag von ca. 00:40 Uhr bis ca. 5:20 Uhr bzw. von ca. 12:40 Uhr bis ca. 17:20 Uhr (von 0,649... Stunden bis 5,530... Stunden nach Mitternacht bzw. nach 12:00 Uhr mittags)
3) jeden Tag um 3:00 Uhr bzw. um 15:00 Uhr; 3,30 m Wasserstandshöhe
4) jeden Tag um 9:00 Uhr bzw. um 21:00 Uhr; 0,30 m Wasserstandshöhe
5) 64,951... $\frac{cm}{h}$ weniger
6) jeden Tag um 0:00 Uhr, um 6:00 Uhr, um 12:00 Uhr bzw. um 18:00 Uhr; 1,80 m Wasserstandshöhe

4.117 ***1)*** 3,882... Stunden nach der Injektion; 3,053... $\frac{mg}{\ell}$
2) 7,764... Stunden nach der Injektion
3) 17,074... Stunden nach der Injektion
4) Die Funktion nähert sich asymptotisch der t-Achse. Die Konzentration des Medikaments wird mit der Zeit immer kleiner, erreicht aber (theoretisch) nie den Wert null.

4.118 ***1)*** 1) $D = \mathbb{R}$
2) nicht symmetrisch
3) N(0|0)
4) H(0,173...|1,5)
5) W(0,346...|1,125)

2)



3) Momentangeschwindigkeit
4) Die t-Koordinate gibt an, nach wie viel Sekunden die maximale Auslenkung erreicht ist. Die y-Koordinate gibt den maximalen Abstand von der Ruhelage in Zentimeter an.

4.119 ***1)*** $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$
2) 1) $D = [0; 4]$
2) ungerade Funktion
3) $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(4|0)$
4) H(1|2), T(3|−2)
5) $W_1(0|0)$, $W_2(2|0)$, $W_3(4|0)$
Die ermittelte Funktion stimmt mit der abgebildeten Funktion überein.

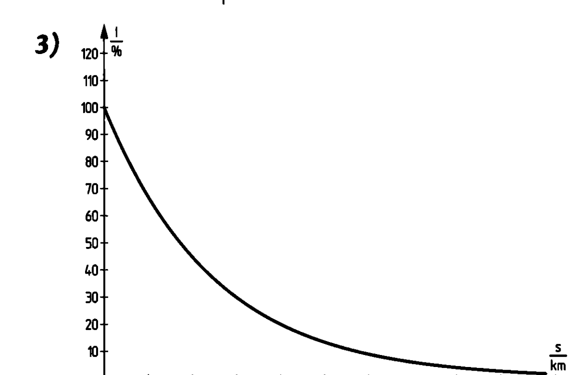
4.120 $N_1(0|0)$, $N_2\left(\frac{5\pi}{7}|0\right)$, $N_3\left(\frac{10\pi}{7}|0\right)$
$H_1(1{,}020...|1{,}729...)$, $H_2(5{,}508...|0{,}704...)$
$T(3{,}264...|-1{,}104...)$
$W_1(2{,}041...|0{,}398...)$, $W_2(4{,}285...|-0{,}254...)$

4.121 ***1)*** 1) $D = \mathbb{R}$
2) nicht symmetrisch
3) $N_k\left(0{,}638... + k \cdot \frac{\pi}{4}|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $H_k\left(0{,}245... + k \cdot \frac{\pi}{2}|1{,}802...\right)$,
$T_k\left(1{,}031... + k \cdot \frac{\pi}{2}|-1{,}802...\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
5) $W_k\left(0{,}638... + k \cdot \frac{\pi}{4}|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

2)

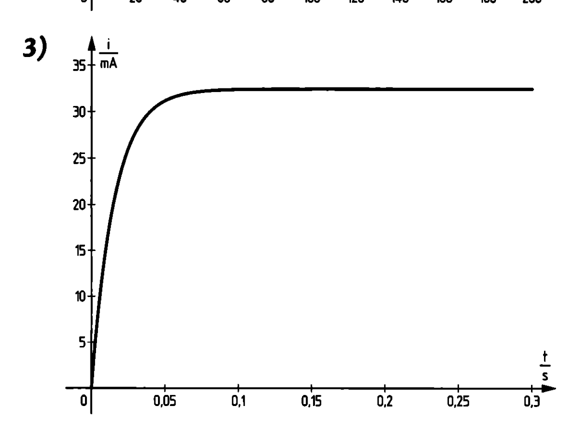
4.122 ***1)*** $I(s) = 100\,\% \cdot 0{,}98^{\frac{s}{km}}$
2) $D = \mathbb{R}_0^+$
Asymptote a: $y = 0$
nicht symmetrisch
keine Nullstellen, keine Extrempunkte,
keine Wendepunkte

3)



4.123 ***1)*** $64{,}685...\ s^{-1}$
2) $D = \mathbb{R}$
Asymptote a: $y = I_0$
nicht symmetrisch
$N(0|0)$
keine Extrempunkte, keine Wendepunkte

3)



4.125 $K'(x) = 3x^2 - 16x + 37$; 2 667 Stück (2 666,$\dot{6}$)

4.126 ***1)*** $K'(x) = 0{,}75x^2 - 165x + 9\,000$ ***2)*** 110 ME; $K'''(x) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ Minimum

4.127 ***1)*** Gewinnschwelle bei ca. 1 270 Stück (1 270,166...),
Gewinngrenze bei ca. 78 730 Stück (78 729,833...)
2) 40 000 Stück

4.128 bei ca. 8 333 Stück (8 333,$\dot{3}$)

4.129 *1)* $K(x) = 0{,}4x + 1200$

2) $S_1 = (16{,}391\ldots \text{ ME} | 1\,206{,}56 \text{ €})$, $S_2 = (73{,}208\ldots \text{ ME} | 1\,229{,}28 \text{ €})$

3) Der x-Wert von S_1 ist die Gewinnschwelle, der x-Wert von S_2 ist die Gewinngrenze.

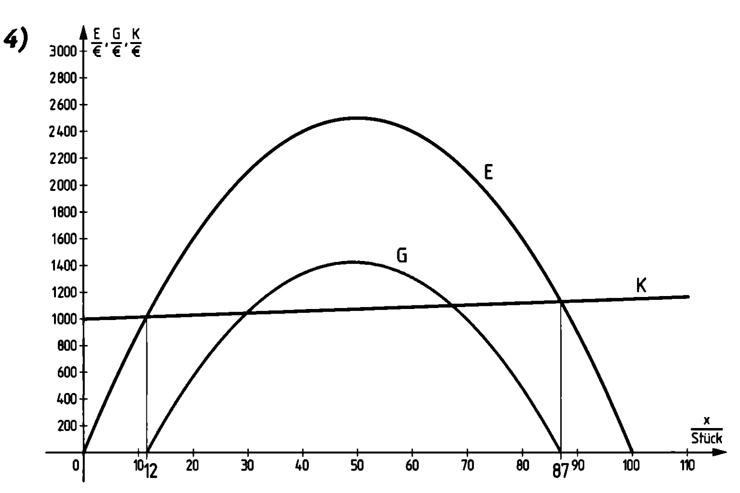
4) 807,04 €

4.130 *1)* $K(x) = 1{,}5x + 1\,000$

2) $E(x) = -x^2 + 100x$

3) 49 Stück (49,25)

4)



Gewinnbereich von 12 Stück (11,493...) bis 87 Stück (87,006...)

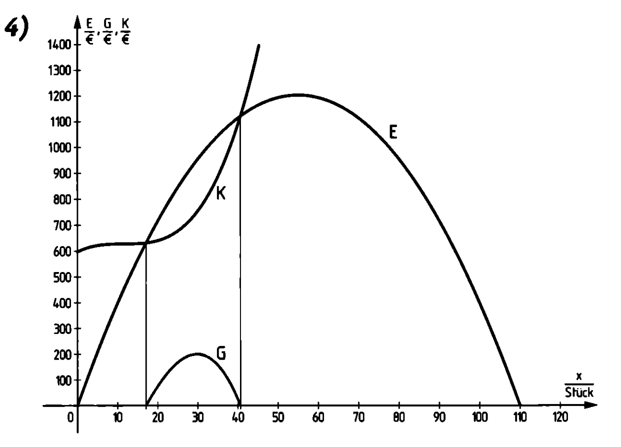
4.131 *1)* $K(x) = \frac{1}{25}x^3 - \frac{11}{10}x^2 + 10x + 1\,604$ *2)* $9{,}1\dot{6}$ Mengeneinheiten

4.132 *1)* $p(x) = -0{,}4x + 44$, $x \in]0 \text{ Stück}; 110 \text{ Stück}[$

2) 55 Stück

3) $K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}69x^2 + 8x + 600$

4)



Die Gewinnfunktion ist die Differenz von Erlösfunktion minus Kostenfunktion.

4.135 1 ⟶ D

Der Funktionswert des Extrempunkts E ist 4, A müsste daher $y(2) = 4$ lauten, um richtig zu sein.
Der x-Wert des Extrempunkts E ist 2, die Gleichungen B und C betreffen aber die Stelle $x = 4$.
Im Extrempunkt E ist die erste Ableitung null, D ist daher richtig.

2 ⟶ B

Der x-Wert des Wendepunkts W ist 4, die Gleichungen A und D betreffen aber die Stelle $x = 2$.
Im Wendepunkt W ist die zweite Ableitung null, B ist daher richtig.
Die Richtigkeit der Aussage C kann nicht entschieden werden. Nur wenn der Wendepunkt W ein Sattelpunkt ist, ist C richtig, sonst ist C falsch.

4.136 Die Polynomfunktion 2. Grads allgemein ansetzen ergibt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Um die Koeffizienten a, b und c zu bestimmen, sind drei voneinander unabhängige Gleichungen notwendig.

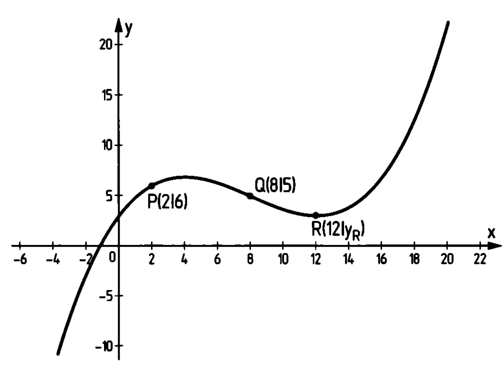
1) P liegt auf dem Graph der Funktion $\Rightarrow$ (1) $2 = a + b + c$. Der Graph ist eine Parabel 2. Grads und daher symmetrisch zur y-parallelen Geraden durch den Extrempunkt. Der Punkt $P_1(7|2)$ liegt daher auch auf dem Graph $\Rightarrow$ (2) $2 = 49a + 7b + c$. E liegt auf dem Graph der Funktion $\Rightarrow$ (3) $5 = 16a + 4b + c$. Lösen des Gleichungssystems ergibt die Koeffizienten $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = \frac{1}{3}$ bzw. die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$.

2) P liegt auf dem Graph der Funktion $\Rightarrow$ (1) $2 = a + b + c$. E liegt auf dem Graph der Funktion $\Rightarrow$ (2) $5 = 16a + 4b + c$. In E ist die erste Ableitung $f'(x) = 2ax + b$ null $\Rightarrow$ (3) $0 = 8a + b$. Lösen des Gleichungssystems ergibt die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$.

4.137 $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{5}$

4.138 ***1)*** $f(x) = \frac{1}{72}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{29}{9}$

2) $y_R = \frac{29}{9}$



3) Die Polynomfunktion dritten Grads ist symmetrisch zum Wendepunkt. Das Maximum muss daher symmetrisch zum Tiefpunkt $R\left(12\middle|\frac{29}{9}\right)$ mit Symmetriezentrum $Q(8|5)$ sein.

$x_H = 8 - (12 - 8) = 4$, $y_H = 5 + \left(5 - \frac{29}{9}\right) = \frac{61}{9} \Rightarrow H\left(4 - \frac{61}{9}\right)$.

4.139 $f(x) = \frac{3}{200}x^3 - \frac{99}{200}x^2 + \frac{81}{25}$

4.140 ***a)*** $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

b) $f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

d) $f(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 6$

4.141 ***1)*** $y(0) = 0 \Rightarrow$ Nullstelle der Funktion
An der Stelle $x = 0$ ist der Funktionswert $y = 0$.
$y(2) = 4 \Rightarrow P(2|4)$
An der Stelle $x = 2$ ist der Funktionswert $y = 4$.
$y'(2) = 0 \Rightarrow$ Extrempunkt an der Stelle $x = 2$
Die Tangente ist waagrecht, die erste Ableitung daher null.
$y''(4) = 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x = 4$
Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten, die zweite Ableitung ist daher null.

2) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

4.142 ***1)*** Wegen der angegebenen Symmetrie muss die Funktionsgleichung die Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ haben. Um die Koeffizienten a, b, c zu bestimmen, sind drei Bedingungen notwendig. Berühren der x-Achse an der Stelle $x = 0$ ergibt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$, der Wendepunkt $W_1(-1|5)$ ergibt $f(-1) = 5$ und $f''(-1) = 0$. Beliebige drei dieser vier Bedingungen ergeben ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit a, b und c als Lösung.

2) $f(x) = -x^4 + 6x^2$

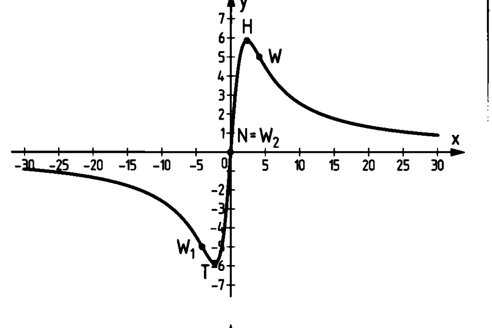
4.143 $f(x) = 0{,}020...x^4 + 0{,}074...x^3 - 0{,}558...x^2 - 0{,}883...x + 4$

4.144 g_{OP}: $y = \frac{4}{5}x$, par: $f(x) = -\frac{8}{225}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{128}{9}$, g_Q: $x = 50$

4.145 ***a)*** $a = \frac{80}{3}$, $b = \frac{16}{3}$

1) $D = \mathbb{R}$
2) ungerade Funktion
3) $N(0|0)$
4) $T(-2{,}309...|-5{,}773...)$, $H(2{,}309...|5{,}773...)$
5) $W_1(-4|-5)$, $W_2(0|0)$, $W(4|5)$
6) a: $y = 0$

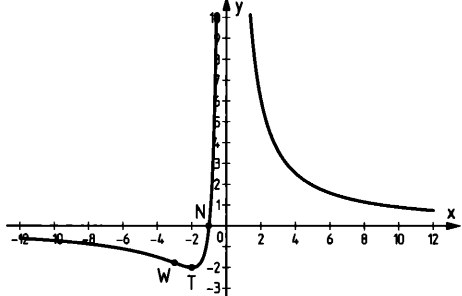
Die Berechnungen stimmen mit der Grafik überein.



b) $a = 8$, $b = 8$

1) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2) nicht symmetrisch
3) $N(-1|0)$
4) $T(-2|-2)$
5) $W(-3|-1{,}\dot{7})$
6) a_1: $x = 0$, a_2: $y = 0$

Die Berechnungen stimmen mit der Grafik überein.



4.146 6,805... m

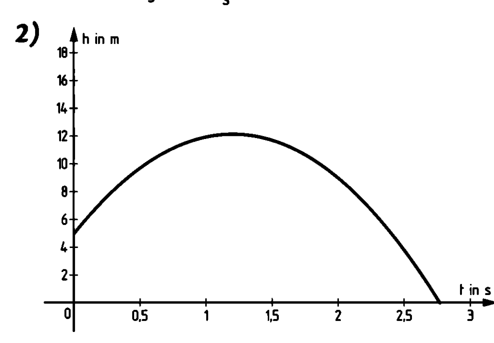
4.147 ***a)*** $f(x) = -0{,}000\,774...x^3 + 0{,}003\,27...x^2 + 0{,}363...x + 1{,}3$

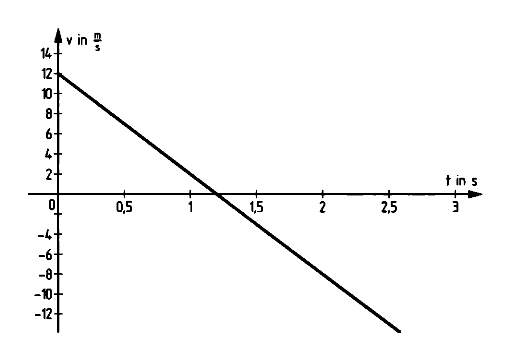
b) 1) 2,7488 m ***2)*** 4,779... m ***3)*** 24,742... m ***4)*** 23,745... m

4.148 ***1)*** $h(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ ***2)*** 2,571... m ***3)*** 15,647... m ***4)*** 2,352... m; 48,366...°

4.149 ***1)*** $v(t) = 12\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t$

2)

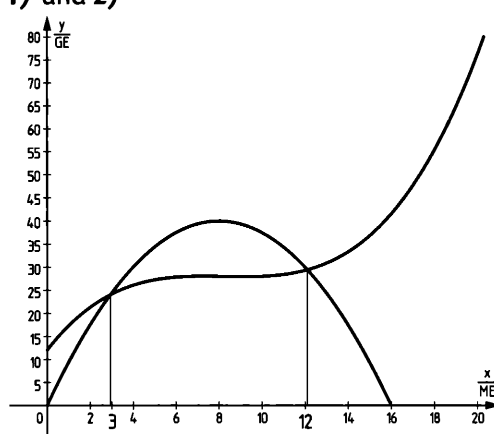




Die Geschwindigkeit wird während der Aufwärtsbewegung des Balls immer kleiner bis sie schließlich null ist. Die Höhenzunahme wird immer kleiner bis der Ball seine größte Höhe erreicht hat. Die Stelle mit der maximalen Höhe entspricht der Nullstelle der Geschwindigkeit. Danach kehrt sich der Vorgang um. Die Geschwindigkeit wird immer größer und hat wegen der Abwärtsbewegung des Balls ein negatives Vorzeichen. Die Höhenabnahme wird immer größer, bis der Ball auf dem Boden auftrifft.

3) 1,2 s

4.150 ***1)*** und ***2)***



2) Gewinnbereich von 3 ME (2,942...) bis 12 ME (12,114...)
3) maximaler Gewinn 12 GE (12,002...) bei 8 ME (8,065...); C(8 ME | 5 GE) (8,065...|4,958...)

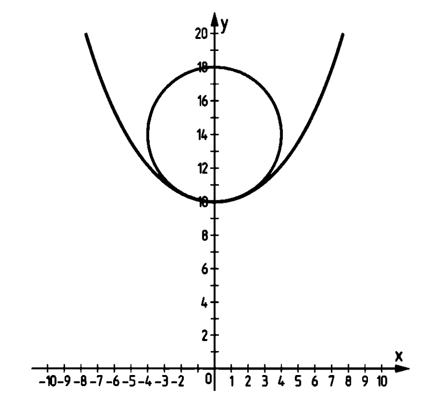
4.151 1 : 1

4.152 21 Zündhölzer für die Länge, 20 Zündhölzer für die Breite bzw. umgekehrt

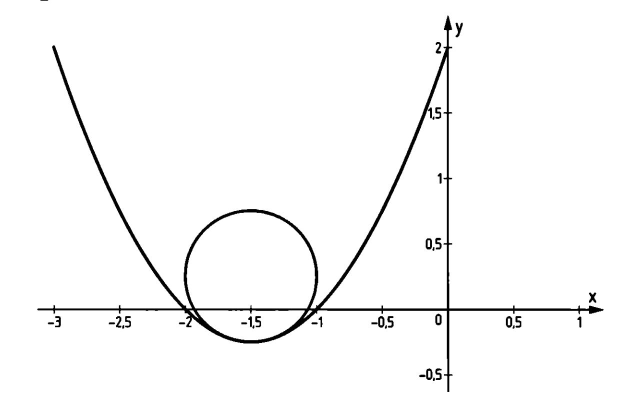
4.153 ***1)*** Einsetzen der Nebenbedingung $h = \frac{120}{r^2\pi}$ in die Hauptbedingung $O(r, h) = r^2\pi + 2r\pi \cdot h$ ergibt $O(r) = r^2\pi + \frac{240}{r}$. ***C)*** ist daher richtig.
2) $r = h = 33{,}677...$ cm
3) $O = 1{,}068...$ m² bei $r = h = 33{,}677...$ cm, $O = 1{,}082...$ m² bei $r = 30$ cm, $h = 42{,}441...$ cm, $O = 1{,}070...$ m² bei $r = 35$ cm, $h = 31{,}181...$ cm

4.154 0,157... m

4.155 $\kappa = 0{,}25$, $\rho = 4$



4.156 an der Stelle $x = -\frac{3}{2}$; Scheitelpunkt der Parabel, das ist der Extrempunkt der Funktion; $\rho = 0{,}5$



4.157 ***a)*** 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(-3{,}780...|0)$
4) $H(-1{,}732...|3{,}039...)$, $T(1{,}732...|0{,}960...)$ 5) $W(0|2)$ 6) t_w: $y = -0{,}9x + 2$

b) 1) $D = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_1(-4|0)$, $N_2(-1{,}219...|0)$, $N_3(0{,}819...|0)$
4) $H(-2{,}863...|3{,}440...)$, $T(-0{,}069...|-2{,}010...)$ 5) $W(-1{,}4\dot{6}|0{,}714...)$ 6) t_w: $y = -2{,}926...x - 3{,}577...$

c) 1) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N(0|0)$
4) $H(-2|-4)$, $T(0|0)$ 5) keine Wendepunkte 6) a_1: $x = -1$, a_2: $y = x - 1$

d) 1) $D = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_1(-2{,}\dot{7}|0)$, $N_2(0|0)$
4) $H(-1{,}851...|2{,}857...)$, $T(0|0)$ 5) $W(-0{,}925...|1{,}428...)$ 6) t_w: $y = -2{,}314...x - 0{,}714...$

e) 1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}$ 2) ungerade Funktion 3) $N(0|0)$
4) keine Extrempunkte 5) $W(0|0)$ 6) a_1: $x = -\sqrt{3}$, a_2: $x = \sqrt{3}$, a_3: $y = 0$

f) 1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) $H_k((2k+1)\cdot\pi|-1)$, $T_k(2k\cdot\pi|1)$, $k \in \mathbb{Z}$ 5) keine Wendepunkte 6) a_k: $x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

g) 1) $D = \mathbb{R}$ 2) nicht symmetrisch 3) $N_1(-0{,}616...|0)$, $N_2(0{,}777...|0)$, $N_3(2{,}982...|0)$
4) $T(0|-1)$, $H(2{,}095...|2{,}219...)$ 5) $W(1{,}047...|0{,}609...)$ 6) t_w: $y = 2{,}304...x - 1{,}804...$

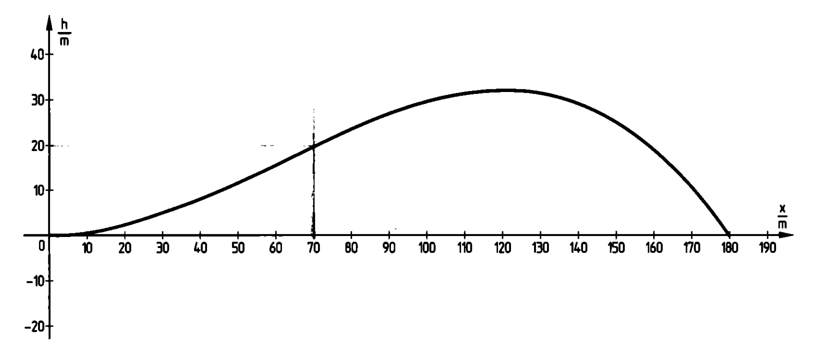
h) 1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 2) gerade Funktion 3) $N_k(k\pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $T_1(4{,}493...|-0{,}217...)$, $T_2(-4{,}493...|-0{,}217...)$, $T_3(10{,}904...|-0{,}091...)$, $T_4(-10{,}904...|-0{,}091...)$ usw.
$H_1(7{,}725...|0{,}128...)$, $H_2(-7{,}725...|0{,}128...)$, $H_3(14{,}066...|0{,}070...)$, $H_4(-14{,}066...|0{,}070...)$ usw.
5) $W_1(2{,}081...|0{,}419...)$, $W_2(-2{,}081...|0{,}419...)$, $W_3(5{,}940...|-0{,}056...)$, $W_4(-5{,}940...|-0{,}056...)$,
$W_5(9{,}250...|0{,}023...)$ usw.

i) 1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 2) gerade Funktion 3) keine Nullstellen
4) keine Extrempunkte 5) $W_1(-0{,}816...|0{,}223...)$, $W_2(0{,}816...|0{,}223...)$ 6) a: $y = 1$

4.158 1) $D = [0\text{ s}; 6\text{ s}]$
2) nicht symmetrisch
3) $N_1\left(\frac{\pi}{4}\middle|0\right)$, $N_2\left(\frac{3\pi}{4}\middle|0\right)$, $N_3\left(\frac{5\pi}{4}\middle|0\right)$, $N_4\left(\frac{7\pi}{4}\middle|0\right)$
4) $H(3{,}116...|5{,}850...)$, $T_1(1{,}545...|-6{,}845...)$, $T_2(4{,}687...|-5{,}000...)$
5) $W_1(0{,}735...|0{,}741...)$, $W_2(2{,}306...|-0{,}633...)$, $W_3(3{,}877...|0{,}541...)$, $W_4(5{,}447...|-0{,}462...)$

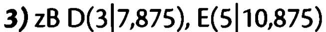
4.159 ***a)*** $f(x) = \frac{3}{128}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + 6$ ***b)*** $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{11}{5}$ ***c)*** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{25}{3}x$

4.160 ***1)*** $h(x) = -\frac{1}{27\,000}x^3 + \frac{1}{150}x^2$ ***2)*** 90 m ***3)*** 25 m

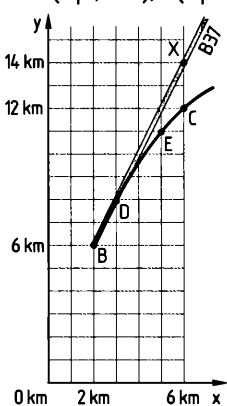


4.161 ***1)*** Die Polynomfunktion 2. Grads allgemein ansetzen ergibt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Um die Koeffizienten a, b, c zu bestimmen, sind drei voneinander unabhängige Gleichungen notwendig. B und C liegen auf dem Graph der Funktion und die Steigung des geradlinigen Stücks von B nach X ist gleich der Steigung der Polynomfunktion im Punkt B.

2) $f(x) = -0{,}125x^2 + 2{,}5x + 1{,}5$



3) zB $D(3|7{,}875)$, $E(5|10{,}875)$



4.162 $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$
$T_1(0|0)$, $T_2(2|0)$, $H(1|1)$
$W_1(0{,}422...|0{,}\dot{4})$, $W_2(1{,}577...|0{,}\dot{4})$
t_1: $y = 1{,}539...x - 0{,}206...$, t_2: $y = -1{,}539...x + 2{,}872...$

4.163 $E_1(0|3)$, $E_2(2|-1)$

4.164 $E_1(-3|88)$ maximum point, $E_2(5|-168)$ minimum point

4.165 The equation $x^3 + x = 0$ has only one real solution $x = 0$. This leads to the only interception of the function $y = x^3 + x$ with the x-axis at $x = 0$.
$y' = 3x^2 + 1$, $y'' = 6x$
bending upwards for $x \in]0; \infty[$

4.166 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$
Calculating the second derivative $f''(x) = 12x^2 - 60x + 48$ of f(x). Solving the equation $12x^2 - 60x + 48 = 0$ with the solutions $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. The intersection $W_1(4|0)$ is a point of inflection.
$W_2(1|15)$
t_1: $y = -32x + 128$, t_2: $y = 22x - 7$

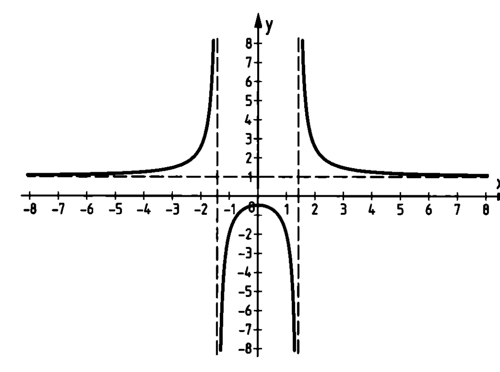
4.167

a)
1) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2) not symmetric
3) $N(3|0)$
4) $H\left(4\middle|\frac{1}{256}\right)$
5) $W\left(5\middle|\frac{2}{625}\right)$
6) a_1: $x = 0$; a_2: $y = 0$

b)
1) $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
2) not symmetric
3) $N(-1|0)$
4) $H(-1|0)$, $T(5|12)$
5) no points of inflection
6) a_1: $x = 2$; a_2: $y = x + 4$

c)
1) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2) not symmetric
3) $N(1{,}259...|0)$
4) $T\left(2\middle|-\frac{3}{8}\right)$
5) $W(2{,}714...|-0{,}331...)$
6) a_1: $x = 0$; a_2: $y = 0$

4.168



1) no x intercept, $y = -\frac{1}{2}$

2) vertical asymptotes: a_1: $x = -\sqrt{2}$, a_2: $x = \sqrt{2}$;
horizontal asymptotes: a_3: $y = 1$

3) concave up: $]-\infty; -\sqrt{2}[$, $]\sqrt{2}; \infty[$,
concave down: $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

4) 1) $D = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
2) even function
3) no zeros
4) $H\left(0\middle|-\frac{1}{2}\right)$
5) no points of inflection
6) a_1: $x = -\sqrt{2}$, a_2: $x = \sqrt{2}$, a_3: $y = 1$

4.169 $x = 0{,}353...$ km

5 Grundlagen der Integralrechnung

5.1 50 km

5.2 1 → B 2 → C

5.4 ***1)*** $s(t) = 40\ \frac{m}{s} \cdot t$ ***2)*** $s(t) = 40\ \frac{m}{s} \cdot t + 50\ m$ ***3)*** $s(t) = 40\ \frac{m}{s} \cdot t + 80\ m$

5.5 A → 7: Die Geschwindigkeit nimmt linear ab und es gilt $v(t) = -5t + 5$. Der zurückgelegte Weg hat daher die Funktionsgleichung $s(t) = -\frac{5t^2}{2} + 5t + C$. Die Nullstelle von v stimmt mit der Extremstelle von s überein. Dieser Beschreibung entspricht der Abbildung 7.

B → 8: Die Geschwindigkeit nimmt linear zu und es gilt $v(t) = 5t + 1$. Der zurückgelegte Weg hat daher die Funktionsgleichung $s(t) = \frac{5t^2}{2} + t + C$. Im angegebenen Definitionsbereich hat v keine Nullstelle, daher hat s keine Extremstelle. Dieser Beschreibung entspricht der Abbildung 8.

C → 5 bzw. 6: Die Geschwindigkeit nimmt linear zu und es gilt $v(t) = 5t$. Der zurückgelegte Weg hat daher die Funktionsgleichung $s(t) = \frac{5t^2}{2} + C$. Die Nullstelle von v stimmt mit der Extremstelle von s überein. Dieser Beschreibung entsprechen den Abbildungen 5 und 6.

D → 2 bzw. 3: Die Geschwindigkeit ist konstant $v = 5\ \frac{m}{s}$. Der zurückgelegte Weg hat daher die Funktionsgleichung $s(t) = 5t + C$. Dieser Beschreibung entsprechen die Abbildungen 2 und 3.

5.6 ***1)*** $32{,}4\ \frac{km}{h}$

2) 25 min

3) Die Funktion v ist die Ableitung der beschriebenen Funktion s.

4) C ist null.

5) Der Tanker übersteigt mit einem Anhalteweg von 6 750 m den maximal erlaubten Anhalteweg von 6 000 m.

5.7 ***A)*** Richtig. Die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit ist die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion.

B) Falsch. Die erste Ableitung der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion nach der Zeit ist nicht die Weg-Zeit-Funktion, sondern die Beschleunigungs-Zeit-Funktion.

C) Richtig. Der im Intervall $[0; t_1]$ zurückgelegte Weg wird mithilfe des bestimmten Integrals

$\int_0^{t_1} v(t)\,dt = s(t_1) - s(0) = s(t_1) - 0 = s(t_1)$ berechnet.

D) Falsch. Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion ist die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion.

E) Richtig. Der im Intervall $[t_2; t_3]$ zurückgelegte Weg wird mithilfe des bestimmten Integrals

$\int_{t_2}^{t_3} v(t)\,dt = s(t_3) - s(t_2)$ berechnet.

5.8 ***1)*** $f_1'(x) = f_2'(x) = f_3'(x) = f_4'(x) = 3x^2$

2) $f_1(x) = x^4 - 3,\ f_2(x) = x^4,\ f_3(x) = x^4 + 2$

5.10 1 → F 2 → E 3 → C 4 → A 5 → D

5.11 ***a)*** $F_1(x) = 4x + 3,\ F_2(x) = 4x - 1$

b) $F_1(x) = x^4 - 2,\ F_2(x) = x^4 + 2$

c) $F_1(x) = 12,\ F_2(x) = -5$

d) $F_1(x) = -\frac{1}{x},\ F_2(x) = -\frac{1}{x} + 1$

e) $F_1(x) = \frac{1}{x} + 3,\ F_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

f) $F_1(x) = x^5,\ F_2(x) = x^5 - 4$

5.12 ***a)*** $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

b) $\int e^x\,dx = e^x + C$

c) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

d) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

e) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

f) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

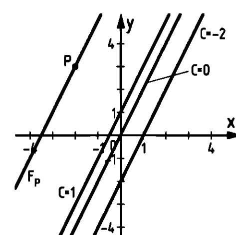
5.13 ***a)*** $\int 2\,dx = 2x + C$ ***b)*** $\int 4x\,dx = 2x^2 + C$ ***c)*** $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

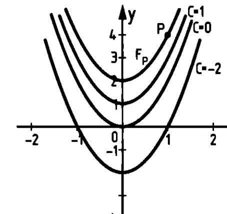


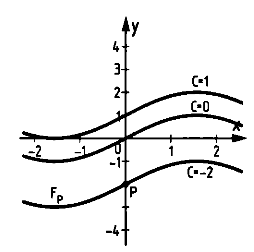
$F_P(x) = 2x + 7$ $F_P(x) = 2x^2 + 2$



$F_P(x) = \sin(x) - 2$







5.14 ***A)*** Falsch. Das unbestimmte Integral einer Konstante ist das Produkt der Konstante mit der Integrationsvariable. Ist die Konstante unterschiedlich, dann ist auch das Produkt unterschiedlich. Die Stammfunktionen sind daher nicht gleich.

B) Falsch. Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $a \cdot F$ eine Stammfunktion von $a \cdot f$ und es gilt im Allgemeinen $f \neq a \cdot f$. Zum Beispiel ist $F_1(x) = x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$. $F_2(x) = 3 \cdot x^2$ ist allerdings keine Stammfunktion von f. Daher ist $a \cdot F$ im Allgemeinen keine Stammfunktion von f.

C) Richtig. Ist F eine Stammfunktion von f, so nennt man die Menge aller Funktionen $F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ das unbestimmte Integral von f(x) und man schreibt $\int f(x)\,dx$.

D) Falsch. Es gibt unterschiedliche Stammfunktionen, deren Menge als unbestimmtes Integral bezeichnet wird. Es gibt aber nur ein unbestimmtes Integral zu einer gegebenen Funktion.

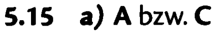
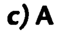
E) Richtig. Die Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch die Konstante C.

F) Falsch. Es gilt: $\int f(x)\,dx = F(x)$, $F'(x) = f(x)$.

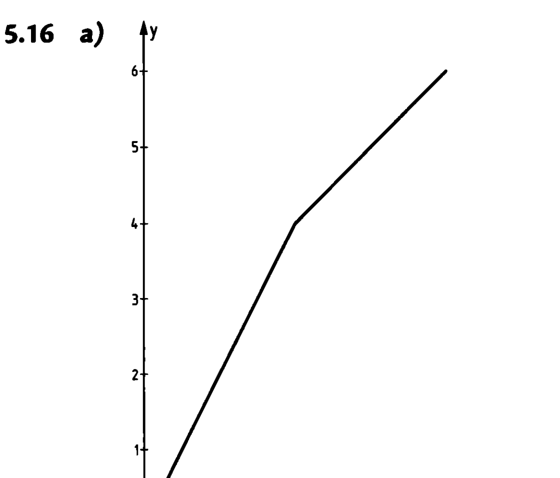
G) Richtig. Die Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante C, in diesem Fall ist C gleich 2.

H) Richtig. F und G unterscheiden sich nur durch die Konstante. Diese ist –5 bei F und 1 bei G.

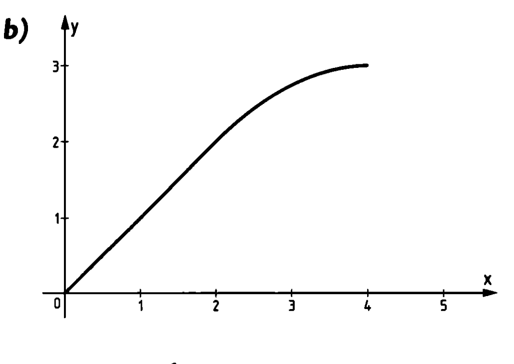
I) Falsch. Im Allgemeinen ist die Summe zweier Stammfunktionen keine Stammfunktion einer gegebenen Funktion.

5.15  ***a)*** **A** bzw. **C**  ***b)*** **B** bzw. **C**  ***c)*** **A**

5.16 ***a)***



b)



5.17 ***A)*** Richtig. f hat an der Stelle x = 2 eine Nullstelle, F hat daher an der Stelle x = 2 eine Extremstelle. Die Steigung von f an der Stelle x = 2 ist kleiner null. Daher liegt an der Stelle x = 2 ein Maximum vor.
B) Falsch. F muss eine Polynomfunktion 4. Grads sein, da f eine Polynomfunktion 3. Grads ist.
C) Falsch. Die y-Werte von f sind im Intervall [1; 2] größer oder gleich null. Daher ist F steigend.
D) Richtig. Die Extremwerte von f markieren die Wendepunkte von F.

5.18 Man legt ein Koordinatensystem fest (x-Achse: Boden, y-Achse: in der Mitte des Tors) und ermittelt mit den Punkten $P_1(0{,}25|1{,}5)$, $P_2(1{,}25|1)$ und $P_3(-1{,}25|1)$ die Funktion $f(x) = -0{,}\dot{3}x^2 + 1{,}520...$, die den parabelförmigen Abschluss beschreibt. f(0,5), f(0,75) bzw. f(1) ergibt die Länge der weiteren Bretter. Addition der Längen und Multiplikation mit der Breite ergibt $3{,}08\dot{3}\ m^2$ von den breiten bzw. $3{,}229...\ m^2$ von den schmalen Brettern.

5.20 ***1)***

	U_4	O_4	$O_4 - U_4$
a)	6,75 E^2	10,75 E^2	4 E^2
b)	6,375 E^2	2,25 E^2	2,25 E^2
c)	28,125 E^2	6,75 E^2	6,75 E^2

2)

	U_6	O_6	$O_6 - U_6$
a)	$7{,}\dot{3}70\ E^2$	$10{,}\dot{0}37\ E^2$	$7{,}\dot{6}\ E^2$
b)	6,75 E^2	8,25 E^2	1,5 E^2
c)	29,25 E^2	33,75 E^2	4,5 E^2

Die Differenz zwischen Ober- und Untersumme wird mit größer werdendem n kleiner.

5.21 ***a)*** 3 ***b)*** 16 ***c)*** $\frac{26}{3}$ ***d)*** 3

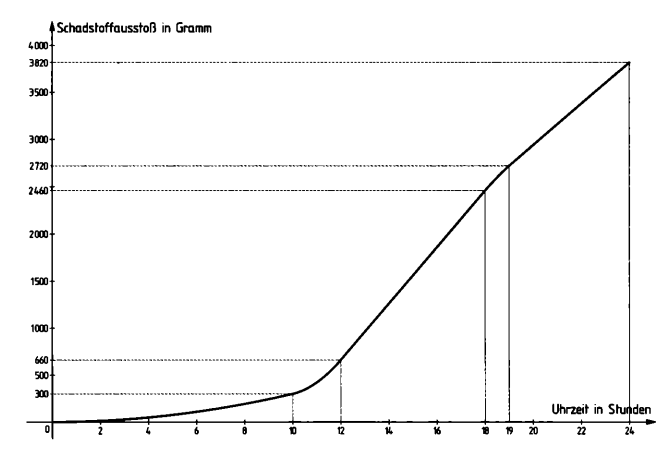
5.22 ***a)*** $A_{Rechteck} = 6\ E^2$ ***b)*** $A_{Trapez} = 12\ E^2$ ***c)*** $A_{Dreieck} = 2\ E^2$ ***d)*** $A_{Trapez} = 20\ E^2$

5.23 ***1)*** Der größte Funktionswert im gegebenen Zeitintervall gibt die maximale Anzahl an Fahrzeugen pro Minute an. Um diesen zu bestimmen, werden die Funktionswerte der im Intervall $[t_1; t_2]$ auftretenden Hochpunkte und die Funktionswerte an den Stellen t_1 bzw. t_2 miteinander verglichen.
2) $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ gibt die Gesamtanzahl an Fahrzeugen im gegebenen Zeitintervall an. Die Gesamtanzahl entspricht dem Flächeninhalt der Fläche zwischen der Funktion f und der waagrechten Achse im Intervall $[t_1; t_2]$.
3) Der Differenzenquotienten $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ gibt die mittlere Anzahl an Fahrzeugen im gegebenen Zeitintervall an.

5.24 ***1)*** 6 GBits ***2)*** 5,91 GBits

5.25 ***1)*** 5 kJ ***2)*** 3,75 kJ

5.26



5.27 ***1)*** $f_1'(x) = \frac{1}{x}$ ***2)*** $f_2'(x) = -\sin(x)$ ***3)*** $f_3'(x) = 2$

5.30 ***a)*** C ***b)*** $\frac{x^2}{2} + C$ ***c)*** $\frac{t^8}{8} + C$ ***d)*** $x + C$ ***e)*** $\frac{u^5}{5} + C$

5.31 ***a)*** $-\frac{1}{x} + C$ ***b)*** $-\frac{1}{2t^2} + C$ ***c)*** $\ln(|x|) + C$ ***d)*** $-\frac{1}{4x^4} + C$ ***e)*** $-\frac{1}{3u^3} + C$

5.32 ***a)*** $\frac{4 \cdot \sqrt[4]{x^7}}{7} + C$ ***b)*** $\frac{5 \cdot \sqrt[5]{x^7}}{7} + C$ ***c)*** $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^{10}}}{10} + C$ ***d)*** $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{u^2}}{2} + C$ ***e)*** $-\frac{2}{3 \cdot \sqrt{x^3}} + C$

5.33 ***a)*** $\frac{7 \cdot \sqrt[7]{x^{12}}}{12} + C$ ***b)*** $-\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{u^2}} + C$ ***c)*** $\frac{2 \cdot \sqrt{x^9}}{9} + C$ ***d)*** $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{t^8}}{8} + C$ ***e)*** $\frac{4 \cdot \sqrt[4]{x^9}}{9} + C$

5.34 ***a)*** $\frac{3^x}{\ln(3)} + C$ ***b)*** $-\frac{1}{2^x \cdot \ln(2)} + C$ ***c)*** $\frac{5^x}{\ln(5)} + C$ ***d)*** $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + C$ ***e)*** $-\frac{1}{5^x \cdot \ln(5)} + C$

5.35 ***a)*** $\sin(t) + C$ ***b)*** $e^u + C$ ***c)*** $-\cos(t) + C$ ***d)*** $\tan(x) + C$ ***e)*** $\arctan(x) + C$

5.37 ***1)*** $\frac{1}{3} \cdot \int x\,dx = \frac{x^2}{6} + C$ ***4)*** $\sqrt{3} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{3}} + C$

2) $3 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx = 3 \cdot \ln(|x|) + C$ ***5)*** $\sqrt{3} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \sqrt{3x} + C$

3) $\sqrt{3} \cdot \int x\,dx = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{2} + C$

5.38 ***a)*** $-\frac{2}{3t^3} + C$ ***b)*** $\frac{3}{4} \cdot \ln(|x|) + C$ ***c)*** $-\frac{2}{3r} + C$ ***d)*** $-\frac{2}{7x^2} + C$ ***e)*** $-\frac{1}{10x^2} + C$

5.39 ***a)*** $\frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{\sqrt{3}} + C$ ***b)*** $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{t^5}}{5} + C$ ***c)*** $2 \cdot \sqrt{5u} + C$ ***d)*** $\sqrt[4]{x} + C$ ***e)*** $\frac{4 \cdot \sqrt{x}}{5} + C$

5.40 ***a)*** $e^2 \cdot x + C$ ***b)*** $a \cdot e^x + C$ ***c)*** $-y_0 \cdot \cos(t) + C$ ***d)*** $b \cdot \tan(x) + C$ ***e)*** $A \cdot \sin(t) + C$

5.41 ***a)*** $x^3 + x + C$ ***b)*** $t^5 + \frac{t^3}{6} - t^2 + C$ ***c)*** $-\frac{3}{x} - 4x + C$

5.42 ***a)*** $a \cdot r + \frac{4 \cdot \sqrt[4]{r^{17}}}{17} - r^3 + C$ ***b)*** $-2 \cdot \cos(x) - 5x + \frac{\sqrt[3]{x^4}}{2} + C$ ***c)*** $2e^t + \frac{\ln(|t|)}{2} + \frac{1}{t^4} + C$

5.43 ***a)*** $2 \cdot \ln(|x|) - \frac{x}{2} + C$ ***b)*** $\frac{3x^2}{10} + \ln(|x|) - \frac{3}{5x} + C$ ***c)*** $-\frac{a}{2x^2} + b \cdot \ln(|x|) - c \cdot x + C$

5.44 ***a)*** $\frac{3}{2} \cdot \arcsin(x) + C$ ***b)*** $\frac{1}{6} \cdot \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$ ***c)*** $\text{arsinh}(t) + C$ ***d)*** $\frac{5}{2} \cdot \arctan(u) + C$

5.45 ***a)*** $x \cdot t + C$ ***b)*** $k \cdot \ln(|V|) + C$ ***c)*** $-\frac{\rho}{2\pi r \cdot (1 - \cos(\alpha))} + C$ ***d)*** $\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\ell \cdot x - \frac{x^2}{2}\right) + C$

5.46 ***1)*** $\frac{a \cdot x^2}{2} + b \cdot x + C$ ***2)*** $\frac{a^2 \cdot x}{2} + a \cdot b + C$ ***3)*** $a \cdot b \cdot x + \frac{b^2}{2} + C$ ***4)*** $(a \cdot x + b) \cdot t + C$

Es wird nach unterschiedlichen Variablen integriert, zB bei ***1)*** nach der Variablen x.
a und b sind bei ***1)*** Formvariablen und werden wie Zahlen behandelt.

5.47 ***1)*** $\frac{t^2}{2} + \frac{s \cdot t}{r} + C$ ***2)*** $r \cdot t + s \cdot \ln(|r|) + C$ ***3)*** $s \cdot t + \frac{s^2}{2r} + C$ ***4)*** $\frac{r \cdot t + s}{r} \cdot x + C$

Es wird nach unterschiedlichen Variablen integriert, zB bei ***1)*** nach der Variablen t.
r und s sind bei ***1)*** Formvariablen und werden wie Zahlen behandelt.

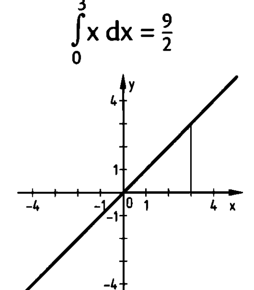
5.48 ***a)*** $F(x) = x^2 + x + 2$ ***b)*** $F(t) = \frac{t^3}{3}$

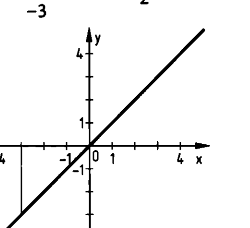
5.49 ***a)*** $y(t) = -\cos(t)$ ***b)*** $h(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + h_0$

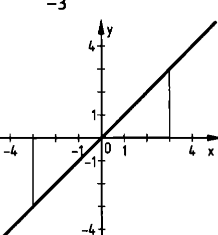
5.50 Beide haben richtig gerechnet. Tina hat die Konstante mit C bezeichnet, bei Manuel hat die Konstante den Wert $\frac{1}{3}$ + C. Das C in Tinas Lösung hat einen anderen Wert als das C in Manuels Lösung.
Umbenennung ergibt:
Tinas Lösung: $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$, Manuels Lösung: $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + D$, dann gilt $C = \frac{1}{3} + D$.
Die beiden Lösungen stimmen überein.

5.51 ***1)*** Es wurde abgeleitet anstatt zu integrieren. $\int(5x^3 + 3x^2)dx = \frac{5x^4}{4} + x^3 + C$
2) Beim zweiten Summanden wurde nach der Formvariablen a anstatt nach der Integrationsvariablen x integriert. $\int(a \cdot x^b + b \cdot a^x)dx = \frac{a \cdot x^{b+1}}{b+1} + \frac{b \cdot a^x}{\ln(a)} + C$

5.52 $\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$ $\int_{-3}^0 x\,dx = -\frac{9}{2}$ $\int_{-3}^3 x\,dx = 0$





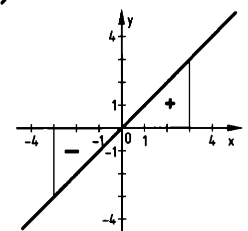


Liegt der Graph von f im Integrationsbereich unterhalb der x-Achse, dann ist das bestimmte Integral negativ, liegt der Graph von f oberhalb, dann ist das bestimmte Integral positiv.

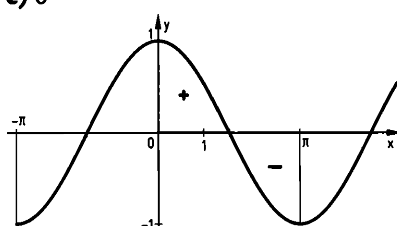
5.56 ***1)*** Falsch. f liegt im definierten Intervall oberhalb der x-Achse, somit kann das Integral nicht null sein.
2) Richtig. Wenn man die Grenzen vertauscht, dann ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals.
3) Ist nur dann richtig, wenn f eine zum Koordinatenursprung symmetrische Funktion ist.
4) Falsch. Die Grenzen des zweiten Integrals sind vertauscht.

5.57 ***A)*** Richtig. Die Summe der Flächeninhalte der Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als der Flächeninhalt der Fläche unterhalb der x-Achse.
B) Richtig. Am hinterlegten Raster ist ablesbar, dass der Flächeninhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall [0; 3] größer als 7 Kästchen und daher größer als 7 ist.
C) Falsch. Das Integral von f von 0 bis 4 berechnet die Differenz der beiden Flächeninhalte. Das Integral von f von 3 bis 4 ist kleiner als null. Die Differenz des Integrals von f von 0 bis 3 und des Integrals von f von 3 bis 4 berechnet die Summe der beiden Flächeninhalte.
D) Richtig. Das Integral von f von 0 bis 3 berechnet den Flächeninhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall [0; 3]. Das Integral von f von 0 bis 4 berechnet die Differenz dieses Flächeninhalts und des Flächeninhalts der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall [3; 4]. Das bestimmte Integral von f von 0 bis 4 ist daher kleiner als das Integral von f von 0 bis 3.
E) Falsch. Das bestimmte Integral von f von 3 bis 4 ist kleiner null, da die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse in diesem Intervall unterhalb der x-Achse liegt. Das Vertauschen der Integrationsgrenzen verändert das Vorzeichen des bestimmten Integrals. Daher ist das bestimmte Integral von f von 4 bis 3 größer null.

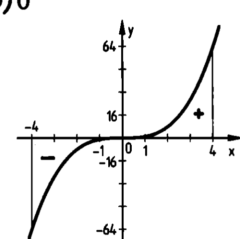
5.58 ***a)*** 0



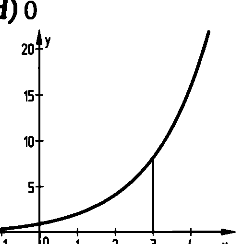
c) 0



b) 0



d) 0



5.59 ***a)*** 0 Der Flächeninhalt oberhalb und unterhalb der x-Achse ist gleich groß.
b) –1 Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, der Flächeninhalt hat daher ein negatives Vorzeichen.
c) $5,\dot{3}$ Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, zusätzlich sind die Grenzen vertauscht, der Flächeninhalt hat daher ein positives Vorzeichen.
d) –1 Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, der Flächeninhalt hat daher ein negatives Vorzeichen.

5.60 ***a)*** $-\frac{81}{4}$ ***b)*** –6 ***c)*** $\frac{1}{4}$ ***d)*** $-\frac{15}{64}$ ***e)*** ln(3)

5.61 ***a)*** 1,885... ***b)*** $\frac{62}{5}$ ***c)*** 9,963... ***d)*** $\frac{4}{5}$

5.62 ***a)*** 2 ***b)*** 12 ***c)*** 3 ***d)*** 0,798...

5.63 ***a)*** 6,389... ***b)*** 7,253... ***c)*** 6,475.... ***d)*** –0,896...

5.64 ***a)*** 1 ***b)*** 0 ***c)*** 1 ***d)*** 1

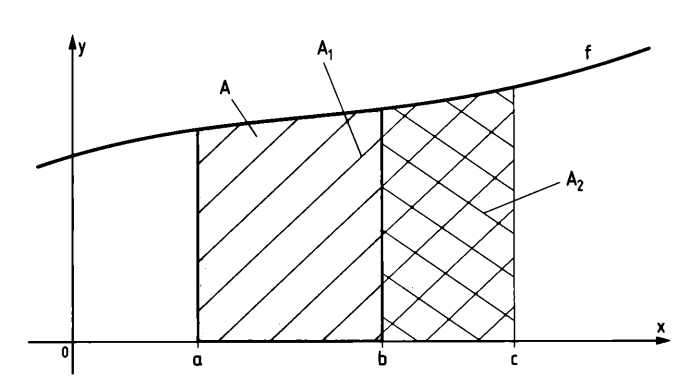
5.65 ***a)*** 80 ***b)*** $31,41\dot{6}$ ***c)*** 34,063...

5.66 ***a)*** π ***b)*** $2 - \pi$ ***c)*** 0

5.67 ***a)*** $\frac{32}{3}$ ***b)*** $\frac{9}{2}$ ***c)*** $\frac{28}{3}$

5.69 ***a)*** b = 2 ***b)*** a = 1 bzw. a = –4 ***c)*** $b = \frac{\pi}{3}$

5.70 LS: F(b) – F(a)
RS: F(c) – F(a) + F(b) – F(c) = F(b) – F(a) $\Rightarrow$ LS = RS



$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx = A_1 - A_2 = A = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Die Summe der beiden Integrale berechnet die Differenz der Flächen $A_1 - A_2$.

Das Ergebnis ist die Fläche A, das entspricht dem Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

5.71 ***1)*** $f'(x) = 18x + 30$ Kettenregel ***2)*** $y'(t) = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ ***3)*** $f'(t) = -a \cdot e^{-a \cdot t}$

5.75

☐ $\int (x^2 + 7)^2\,dx$	☐ $\int a^2 \cdot x\,dx$	☒ $\int \ln\left(\frac{7}{3} + x\right)dx$
☒ $\int \left(\frac{x}{3} + 7\right)^3 dx$	☒ $\int \sqrt{\frac{x}{3} + 7}\,dx$	☐ $\int \left(\sqrt{\frac{x}{3}} + 7\right)dx$

5.76

1) B $\int x \cdot (x^2 + 1)^{20}\,dx$	4) C $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{2t}\,dt$	7) C $\int \frac{\sqrt{a \cdot x + 1}}{\sqrt{x}}\,dx$
2) A $\int 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\,dx$	5) A $\int (1 + \sin(t))^2 \cdot \cos(t)\,dt$	8) C $\int \sqrt{x^3 + 1} \cdot 3x\,dx$
3) A $\int 2t \cdot e^{t^2 + 1}\,dt$	6) C $\int \sqrt[3]{5 - x^2} \cdot (-2x^2)\,dx$	9) B $\int \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{3t^2}\,dt$

1) $u = x^2 + 1,\ u' = 2x$ Der Integrand hat die Form $\frac{1}{2} \cdot u' \cdot u^{20}$.

2) $u = x^2 + 1,\ u' = 2x$ Der Integrand hat die Form $u' \cdot \sqrt{u}$.

3) $u = t^2 + 1,\ u' = 2t$ Der Integrand hat die Form $u' \cdot e^u$.

4) $u = \frac{1}{t},\ u' = -\frac{1}{t^2}$ Der Integrand hat die Form $e^u \cdot u' \cdot \left(-\frac{t}{2}\right)$.

5) $u = 1 + \sin(t),\ u' = \cos(t)$ Der Integrand hat die Form $u^2 \cdot u'$.

6) $u = 5 - x^2,\ u' = -2x$ Der Integrand hat die Form $\sqrt[3]{u} \cdot u' \cdot x$.

7) $u = a \cdot x,\ u' = a$ Der Integrand hat die Form $\frac{\sqrt{u} + 1}{\sqrt{x}}$.

8) $u = x^3 + 1,\ u' = 3x^2$ Der Integrand hat die Form $\sqrt{u} \cdot u' \cdot \frac{1}{x}$.

9) $u = -\frac{1}{t},\ u' = \frac{1}{t^2}$ Der Integrand hat die Form $e^u \cdot u' \cdot \frac{1}{3}$.

5.77 1 → B 2 → C 3 → A 4 → C 5 → B 6 → B

5.78	***a)*** $\frac{(3x - 2)^4}{12} + C$	***b)*** $\frac{(2u + 1)^3}{6} + C$	***c)*** $\frac{(6x - b)^5}{30} + C$	***d)*** $\frac{(4t - 5)^{\frac{5}{2}}}{10} + C$
5.79	***a)*** $\frac{3}{5 \cdot (2 - 5t)} + C$	***b)*** $-\frac{1}{40 \cdot (5x - 2)^2} + C$	***c)*** $-\frac{5}{6 \cdot (x + 1)^3} + C$	***d)*** $-\frac{1}{7 \cdot (7s + 3)^4} + C$
5.80	***a)*** $2a \cdot \sqrt{x + 2} + C$	***b*** $\frac{3}{16} \cdot \sqrt{(4s - 3)^3} + C$	***c)*** $2 \cdot \sqrt{2x - 5} + C$	***d)*** $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{(3t + 4)^3} + C$
5.81	***a)*** $\ln(\lvert x - 3 \rvert) + C$	***b)*** $2 \cdot \ln(\lvert 2x + 1 \rvert) + C$	***c)*** $\ln(\lvert s + 3t \rvert) + C$	***d)*** $3 \cdot \ln(\lvert s + 3t \rvert) + C$
5.82	***a)*** $e^{x + 1} + C$	***b)*** $-\frac{1}{3e^{3t}} + C$	***c)*** $\frac{1}{2} \cdot e^{2s - t} + C$	***d)*** $-e^{2s - t} + C$
5.83	***a)*** $\frac{2^{t - 2}}{\ln(2)} + C$	***b)*** $-\frac{3 \cdot 10^{-x}}{\ln(10)} + C$	***c)*** $\frac{5^{2x - 1}}{6 \cdot \ln(5)} + C$	***d)*** $\frac{a^{2t + 3}}{2 \cdot \ln(a)} + C$

5.84 ***a)*** $-\frac{1}{5}\cdot\cos(5t)+C$ ***b)*** $2\cdot\sin(t+1)+C$ ***c)*** $\frac{1}{3}\cdot\sin(3x+2)+C$ ***d)*** $-\frac{A}{\omega}\cdot\cos(\omega t+\varphi)+C$

5.85 ***a)*** $\frac{(x^2-3)^4}{8}+C$ ***b)*** $-\sqrt{(4-r^2)^3}+C$ ***c)*** $\frac{(4x^3+5)^5}{60}+C$ ***d)*** $-\frac{1}{4\cdot(x^2-4x+5)^2}+C$

5.86 ***a)*** $-\ln(|1-x^2|)+C$ ***b)*** $\frac{1}{2}\cdot\ln(|x^2+4x-3|)+C$ ***c)*** $\ln(|s^3+s-1|)+C$ ***d)*** $\frac{1}{6}\cdot\ln(|2t^3+1|)+C$

5.87 ***a)*** $\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}+C$ ***b)*** $-\frac{1}{2}\cdot\cos^2(t)+C$ ***c)*** $\frac{1}{3}\cdot e^{x^3+1}+C$ ***d)*** $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+C$

5.88 ***a)*** $\frac{1}{2}\cdot\ln^2(|x|)+C$ ***b)*** $\ln(|\ln(|x|)|)+C$ ***c)*** $\ln(1-\cos(x))+C$ ***d)*** $-\ln(|2-e^x|)+C$

5.89 ***a)*** $\frac{1}{3}\cdot\tan(3x)+C$ ***b)*** $3\cdot\tan(x-1)+C$ ***c)*** $\frac{1}{5}\cdot\tan(2x+1)+C$ ***d)*** $\frac{1}{2}\cdot\arctan(2x)+C$

5.90 ***a)*** $\cosh(x+4)+C$ ***b)*** $\frac{1}{5}\cdot\sinh(5t)+C$ ***c)*** $\frac{1}{3}\cdot\cosh(3x-2)+C$ ***d)*** $\frac{1}{4}\cdot\tanh(4x)+C$

5.91 ***1)*** Mit den bisher kennen gelernten Methoden nicht lösbar.

2) $u=x^2+4 \Rightarrow \int\frac{x}{x^2+4}\,dx=\int\frac{x}{u}\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\cdot\ln(|x^2+4|)+C$

3) $dt=\frac{du}{\omega} \Rightarrow \int\sin(\omega t+\varphi)\,dt=\int\sin(u)\frac{du}{\omega}=-\frac{1}{\omega}\cdot\cos(\omega t+\varphi)+C$

5.92 ***a)*** 68 ***b)*** 512 ***c)*** 90 ***d)*** $\frac{8}{3}$

5.93 ***a)*** 25,556... ***b)*** $\frac{1}{3}$ ***c)*** $e-1$ ***d)*** 4

5.94 ***1)*** Substitution von x durch $a\cdot\sin(t)$ ergibt $dx=a\cdot\cos(t)\,dt$ und $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\cos(t)$.

Einsetzen in $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ergibt $a^2\cdot\int\cos^2(t)\,dt$.

Umformen von $\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=\cos^2(t)-(1-\cos^2(t))=2\cdot\cos^2(t)-1$ auf

$\cos^2(t)=\frac{1+\cos(2t)}{2}$ ergibt $\frac{a^2}{2}\cdot\int(1+\cos(2t))\,dt$.

Lösen des Integrals ergibt $\frac{a^2}{2}\cdot\left(t+\frac{\sin(2t)}{2}+C_1\right)$ und wegen $\sin(2t)=2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)$ und nach

Auflösen der Klammern $\frac{a^2}{2}\cdot t+\frac{a^2}{2}\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)+C$.

Umformen von $x=a\cdot\sin(t)$ ergibt $\sin(t)=\frac{x}{a}$ bzw. $t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$.

Ersetzen von t, sin(t) und $\cos(t)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ ergibt $\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C$.

Kürzen von a^2 liefert das angegebene Ergebnis.

2) $\frac{9\pi}{4}$

3) Der Graph von $y=\sqrt{9-x^2}$ ist ein Halbkreis mit Radius $r=3$.

$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ ist daher der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit $r=3$ und hat den Wert $\frac{3^2\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$.

5.97 1) [A] $\int a\cdot\sin(t)\,dt$ 3) [C] $\int a\cdot t\cdot\sin(t^2)\,dt$ 5) [B] $\int e^{3x}\,dx$ 7) [D] $\int 3x\cdot e^x\,dx$

2) [C] $\int 3x\cdot e^{3x^2+1}\,dx$ 4) [D] $\int t\cdot\sin(t)\,dt$ 6) [A] $\int 3e^x\,dx$ 8) [B] $\int a\cdot\sin(\omega t+\varphi)\,dt$

1) Anwenden der Faktorregel ergibt $a\cdot\int\sin(x)\,dx$. $\int\sin(x)\,dx$ ist ein Grundintegral.
2) Substitution mit $u=3x^2+1$, $dx=\frac{du}{6x}$ und kürzen von $\frac{3x}{6x}$ ergibt $\frac{1}{2}\cdot\int e^u\,du$. $\int e^u\,du$ ist ein Grundintegral.
3) Substitution mit $u=t^2$, $dt=\frac{du}{2t}$ und kürzen von $\frac{a\cdot t}{2\cdot t}$ ergibt $\frac{a}{2}\cdot\int\sin(u)\,du$. $\int\sin(u)\,du$ ist ein Grundintegral.
4) Partielle Integration mit $u=t$, $u'=1$ bzw. $v'=\sin(t)$, $v=-\cos(t)$ ergibt das Grundintegral $\int 1\cdot(-\cos(t))\,dt=-\int\cos(t)\,dt$.

5) Wegen $e^{3x} = f(3x + 0)$ hat die Funktion die Form $f(ax + b)$. Lineare Substitution mit $u = 3x$, $dx = \frac{du}{3}$ ergibt $\frac{1}{3} \cdot \int e^u\,du$. $\int e^u\,du$ ist ein Grundintegral.
6) Anwenden der Faktorregel ergibt $3 \cdot \int e^x\,dx$. $\int e^x\,dx$ ist ein Grundintegral.
7) Partielle Integration mit $u = 3x$, $u' = 3$ bzw. $v' = e^x$, $v = e^x$ ergibt das Grundintegral $\int 3 \cdot e^x\,dx = 3 \cdot \int e^x\,dx$.
8) Anwenden der Faktorregel ergibt $a \cdot \int \sin(\omega t + \varphi)\,dt$. Wegen $\sin(\omega t + \varphi) = f(\omega t + \varphi)$ hat die Funktion die Form $f(ax + b)$. Lineare Substitution mit $u = \omega t + \varphi$, $dt = \frac{du}{\omega}$ ergibt $a \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int \sin(u)\,du$. $\int \sin(u)\,du$ ist ein Grundintegral.

5.98 ***a)*** $t \cdot \sin(t) + \cos(t) + C$ ***b)*** $x \cdot e^x - e^x + C$ ***c)*** $\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$ ***d)*** $\frac{3^t \cdot (2t - 1)}{2 \cdot \ln(3)} + C$

5.99 ***a)*** $2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x) + C$ ***c)*** $\frac{t^3}{3} \cdot \ln(t) - \frac{t^3}{9} + C$
b) $t^2 \cdot \sin(t) + 2t \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(t) + C$ ***d)*** $x^2 \cdot \sinh(x) - 2x \cdot \cosh(x) + 2 \cdot \sinh(x) + C$

5.100 ***a)*** $\frac{\ln^2(x)}{2} + C$ ***b)*** $-\frac{1 + \ln(x)}{x} + C$ ***c)*** $\frac{x^4 \cdot \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C$ ***d)*** $x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} + C$

5.101 ***a)*** $\frac{\sin^2(t)}{2} + C$ ***b)*** $\frac{x - \sin(x) \cdot \cos(x)}{2} + C$ ***c)*** $\frac{e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x)}{2} + C$ ***d)*** $-\frac{\sin(t) + \cos(t)}{2e^t} + C$

5.102 ***a)*** $-\frac{t}{3} \cdot \cos(3t) + \frac{1}{9} \cdot \sin(3t) + C$ ***c)*** $x^2 \cdot \ln(3x) - \frac{x^2}{2} + C$
b) $-t \cdot e^{-t} - e^{-t} + C$ ***d)*** $\frac{x \cdot \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$

5.103 ***a)*** $\frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \sin^2(x) - \frac{1}{8} \cdot e^{2x} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{8} \cdot e^{2x} + C$ ***c)*** $\frac{r \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{k\varphi} + k \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{k\varphi}}{1 + k^2} + C$
b) $\frac{e^{-st} - 2t \cdot e^{-st}}{s} - \frac{2e^{-st}}{s^2} + C$ ***d)*** $\frac{(6x^2 + 2x - 4) \cdot \sqrt{x + 1}}{15} + C$

5.104 ***a)*** $\frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + x \cdot \ln(x) - x + C$ ***c)*** $(2t - 1) \cdot \sin(t - 1) + 2 \cdot \cos(t - 1) + C$
b) $\frac{\omega t + \varphi - \sin(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t + \varphi)}{2\omega} + C$

5.105 ***a)*** $x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2} + C$ ***c)*** $x \cdot \ln(x^2) - 2x + C$
b) $x \cdot \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{1 + x^2} + C$ ***d)*** $\frac{1}{2} \cdot \arcsin(x) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + C$

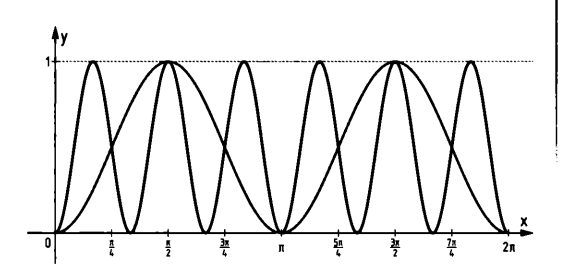
5.107 ***a)*** 2,097... ***b)*** 0,636... ***c)*** 7,642... ***d)*** 12,059...

5.108 ***a)*** −2 ***b)*** −0,848... ***c)*** 9,456... ***d)*** 5,297...

5.109 $u = e^{3t}$ ergibt $u' = 3 \cdot e^{3t}$ und $v' = 3t + 1$ ergibt $v = \frac{3t^2}{2} + t$. Der nach dem ersten Integrationsschritt auftretende Integrand $u' \cdot v$ ist aufwändiger als der ursprüngliche Integrand $u \cdot v'$.

5.110 ***1)*** Es sind individuell verschiedene Lösungen möglich.
2) Partielles Integrieren von $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\,dx$ mit $u = \sin(a \cdot x)$ bzw. $v' = \sin(b \cdot x)$ ergibt $-\frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x) + \frac{a}{b} \cdot \int \cos(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x)\,dx$.
Nochmaliges partielles Integrieren mit $u = \cos(a \cdot x)$ bzw. $v' = \cos(b \cdot x)$ ergibt
$-\frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x) + \frac{a}{b^2} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x) + \frac{a^2}{b^2} \cdot \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\,dx$.
Umformen der Gleichung $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\,dx =$
$= -\frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x) + \frac{a}{b^2} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x) + \frac{a^2}{b^2} \cdot \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\,dx$
ergibt die Lösung des unbestimmten Integrals.
$\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\,dx = \frac{\frac{a}{b^2} \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x) - \frac{1}{b} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(b \cdot x)}{1 - \frac{a^2}{b^2}} + C$. Lösen des bestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen 2π bzw. 0 ergibt das angegebene Ergebnis null.

3) Bei ***1)*** ist im Intervall $[0; 2\pi]$ die Summe der Flächeninhalte der positiv orientierten Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse gleich der Summe der Flächeninhalte der negativ orientierten Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse. Bei ***3)*** sind im Intervall $[0; 2\pi]$ alle Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse positiv orientiert.



4) Wegen a = b gilt $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx = \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx$. Partielles Integrieren ergibt

$-\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + \int \cos(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x)\, dx$ bzw. wegen

$\int \cos^2(a \cdot x)\, dx = \int (1 - \sin^2(a \cdot x))\, dx = x - \int \sin^2(a \cdot x)\, dx$ erhält man

$-\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + x - \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx$. Umformen der Gleichung

$\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx = -\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + x - \int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx$ ergibt die Lösung

des unbestimmten Integrals $\int \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x) + C$.

Berechnung des bestimmten Integrals ergibt

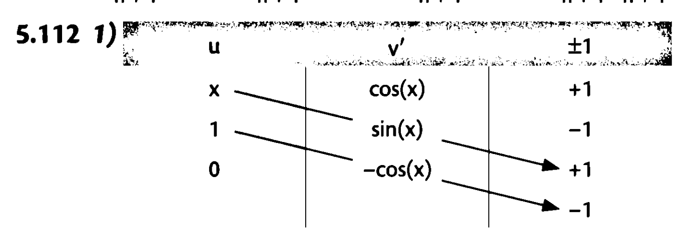
$$\int_0^{2\pi} \sin(a \cdot x) \cdot \sin(a \cdot x)\, dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \cos(a \cdot x)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - \frac{1}{2a} \cdot 0 \cdot 1 - \left(\frac{0}{2} - \frac{1}{2a} \cdot 0 \cdot 1\right) = \pi.$$

Wegen $\sin(a \cdot 2\pi) = \sin(a \cdot 0) = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist das Ergebnis von a nicht abhängig.

5.111 Partielle Integration (für $n \neq -1$ beliebig) ergibt $\int x^n \cdot \ln(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\, dx =$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot ((n+1) \cdot \ln(x) - 1) + C$

5.112 ***1)***



Die Tabellenmethode ergibt

$\int x \cdot \cos(x)\, dx = x \cdot \sin(x) \cdot 1 + 1 \cdot (-\cos(x)) \cdot (-1) + C = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$.

Die partielle Integration führt auf dasselbe Ergebnis.

2) Für die partielle Integration gilt:

$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int \overline{u}(x) \cdot \overline{v}'(x)\, dx =$

$= u(x) \cdot v(x) - (\overline{u}(x) \cdot \overline{v}(x) - \int \overline{u}'(x) \cdot \overline{\overline{v}}(x)\, dx) = u(x) \cdot v(x) - \overline{u}(x) \cdot \overline{v}(x) + \int \overline{\overline{u}}(x) \cdot \overline{\overline{v}}'(x)\, dx =$

$= u(x) \cdot v(x) - \overline{u}(x) \cdot \overline{v}(x) + \overline{\overline{u}}(x) \cdot \overline{\overline{v}}(x) - \int \overline{\overline{u}}'(x) \cdot \overline{\overline{v}}(x)\, dx = \ldots$ usw.

Für die Tabellenmethode gilt:

u	v'	±1
$u(x)$	$v'(x)$	+1
$u'(x) = \bar{u}(x)$	$v(x) = \bar{v}'(x)$	−1
$\bar{u}'(x) = \bar{\bar{u}}(x)$	$\bar{v}(x) = \bar{\bar{v}}'(x)$	+1
	$\bar{\bar{v}}(x) = \bar{\bar{\bar{v}}}'(x)$	−1
		+1

Multipliziert man in den Diagonalen, so erhält man
$u(x) \cdot v(x) \cdot (+1) + \bar{u}(x) \cdot \bar{v}(x) \cdot (-1) + \bar{\bar{u}}(x) \cdot \bar{\bar{v}}(x) \cdot (+1) + \dots$.
Das ist das oben angegebene Ergebnis der partiellen Integration.
Die Methode ist zielführend, wenn die Ableitung eines der beiden Faktoren des Integranden nach endlich vielen Schritten null wird.

5.113 ***A)*** Die Ableitungen von $f(x) = \cos(x)$ und die Ableitungen von $g(x) = \sin(x)$ sind zyklisch und werden daher nicht null. Aus diesem Grund versagt die Tabellenmethode aus **5.112**.
B) Die dritte Ableitung von $f(x) = x^2$ ist null, die Tabellenmethode ergibt
$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$

5.114 ***1)*** $\frac{8x-7}{x^2-3x-4}$ ***2)*** $\frac{x-2}{x^2+4x+4}$ ***3)*** $\frac{3x^2-12x+17}{x^3-5x^2+7x-3}$
Der Grad des Zählerpolynoms ist jeweils um eins kleiner als der Grad des Nennerpolynoms.

5.115 $x, x+1, x^2, x^3$

5.116 $x^3 + 2x^2 - 15x = x \cdot (x-3) \cdot (x+5)$
Das Polynom dritten Grads hat drei reelle Nullstellen, daher kann der Nenner in drei Linearfaktoren zerlegt werden.
$x^3 + 2x^2 + 5x = x \cdot (x^2 + 2x + 5)$
Das Polynom dritten Grads hat nur eine reelle Nullstellen, daher kann der Nenner in einen Linearfaktor und in den Term $x^2 + 2x + 5$ zerlegt werden.

5.120 ***a)*** zwei einfache
b) zwei einfache komplexe
c) eine einfache und zwei einfache komplexe
d) eine einfache und eine zweifache
e) zwei einfache und eine zweifache
f) vier einfache komplexe

5.121 ***C)*** ist richtig.
A) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}$ ***B)*** $\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+3}$

5.122 ***a)*** $\frac{2}{x} - \frac{4}{x-3}$ ***b)*** $-\frac{3}{x} + \frac{7}{x-5}$ ***c)*** $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2}$ ***d)*** $\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3}$

5.123 ***a)*** $-\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x+2}$ ***b)*** $\frac{1}{5 \cdot (x+2)} + \frac{9}{5 \cdot (x-3)}$ ***c)*** $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ ***d)*** $\frac{4}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2}$

5.124 ***a)*** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x-4}$ ***b)*** $\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$ ***c)*** $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-4}$ ***d)*** $\frac{2}{5 \cdot (x-1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{5 \cdot (x+2)}$

5.125 ***a)*** $x - 5 - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-4}$ ***b)*** $x - 1 - \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3}$ ***c)*** $2 + \frac{3}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}$ ***d)*** $1 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x}$

5.126 *a)* $2 \cdot \ln(|x+1|) - 3 \cdot \ln(|x-1|) + C$ *c)* $3 \cdot \ln(|x-2|) - \ln(|x+4|) + C$

b) $7 \cdot \ln(|x+4|) + 5 \cdot \ln(|x|) + C$ *d)* $-\frac{3}{x+1} + 2 \cdot \ln(|x+1|) + C$

5.127 *a)* $\frac{7}{4} \cdot \ln(|x-2|) + \frac{1}{4} \cdot \ln(|x+2|) + \ln(|x|) + C$ *c)* $-\frac{4}{x-2} + \ln(|x|) + C$

b) $\frac{6}{x} + 7 \cdot \ln(|x+5|) + \ln(|x|) + C$ *d)* $3 \cdot \ln(|x-1|) + 5 \cdot \ln(|x+2|) - 2 \cdot \ln(|x|) + C$

5.128 *a)* $2x + 3 \cdot \ln(|x-1|) - \ln(|x+5|) + C$

b) $\frac{3x^2}{2} - 4x + 3 \cdot \ln(|x-2|) - 2 \cdot \ln(|x+4|) + C$

c) $\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \cdot \ln(|x-3|) + \frac{4}{3} \cdot \ln(|x|) + C$

d) $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{49x^2}{2} - 267x + \frac{32\,769}{13} \cdot \ln(|x+8|) + \frac{3\,124}{13} \cdot \ln(|x-5|) + C$

5.129 *A) 1)* $\ln\left(\sqrt{|x^2-4|}\right) + C$ *2)* Substitution mit $u = x^2 - 4$ ergibt $\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u}\, du$

B) 1) $\ln(|x+4|) + C$ *2)* Kürzen mit $(x-4)$ ergibt $\int \frac{1}{x+4}\, dx$

C) 1) $\ln(|x+11|) + C$ *2)* Kürzen mit $(x+5)$ ergibt $\int \frac{1}{x+11}\, dx$

5.130 *a)* $\frac{2x+3}{x^2+4} - \frac{5}{x}$ *b)* $\frac{5}{x^2+x+1} + \frac{3}{x}$ *c)* $\frac{x}{x^2+4x+6} - \frac{1}{x}$ *d)* $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+3}$

5.131 *a)* $3 \cdot \arctan(x) - \ln(|x|) + C$ *c)* $\arctan(x) + \frac{2x^2+2}{x} + C$

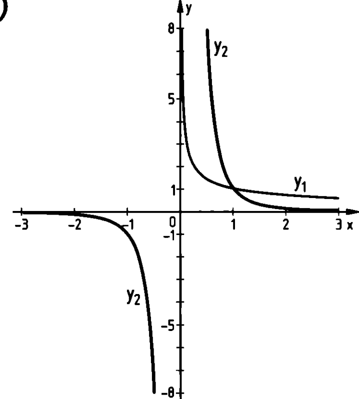
b) $\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+3) + 2 \cdot \ln(|x-1|) + C$ *d)* $\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \ln(x^2+4) + 3 \cdot \ln(|x|) + C$

5.132 Wegen $\ln\left(\left|\frac{x \cdot (x+1)}{x+2}\right|\right) = \ln(|x|) + \ln(|x+1|) - \ln(|x+2|)$ müssen in der Angabe die Teilbrüche $\frac{1}{x}, \frac{1}{x+1}, -\frac{1}{x+2}$ aufgetreten sein. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ ergibt den Term $\frac{x^2+4x+2}{x^3+3x^2+2x}$. Lösen des Integrals $\int \frac{x^2+4x+2}{x^3+3x^2+2x}\, dx$ mittels Partialbruchzerlegung führt auf das angegebene Ergebnis.

5.133 *1)* Es sind individuell verschiedene Lösungen möglich.

2) Multiplizieren der angegebenen Gleichung mit $(x+1)$ ergibt die Gleichung $\frac{3}{x+4} = A + \frac{B \cdot (x+1)}{x+4}$. Für $x = -1$ (das ist gleichzeitig jener Wert, bei dem der Nenner des Teilbruchs mit A im Zähler null wird) wird der Term mit B im Zähler null und man erhält die Gleichung $\frac{3}{-1+4} = A + 0$ bzw. $A = 1$. Analog erhält man durch Multiplizieren der Gleichung mit $(x+4)$ für B den Wert (-1).

5.134 *1)*

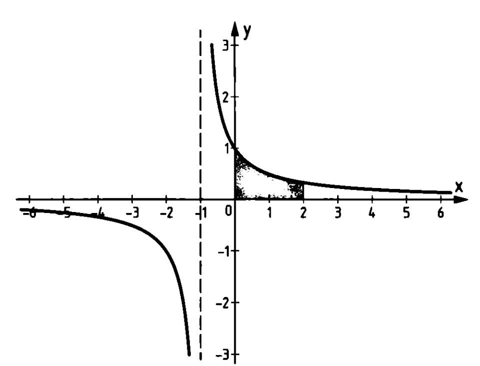


2) A: y_1 und y_2 beschränkt
B: y_1 und y_2 nicht beschränkt
C: y_1 und y_2 nicht beschränkt
D: y_1 und y_2 beschränkt

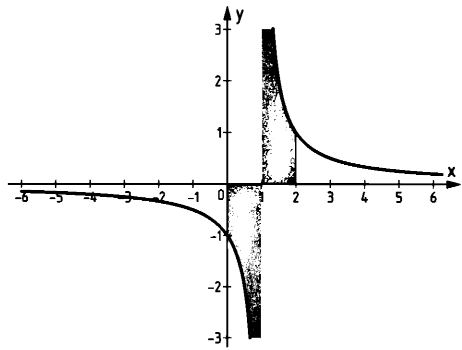
3) Division durch 0, $\sqrt{\infty}$, ∞^2 treten auf.

5.136 *1)* $\int_1^\infty e^{-x}\, dx$ *2)* $\int_0^3 \frac{1}{x}\, dx$ *3)* $\int_0^2 \frac{1}{x^2}\, dx$

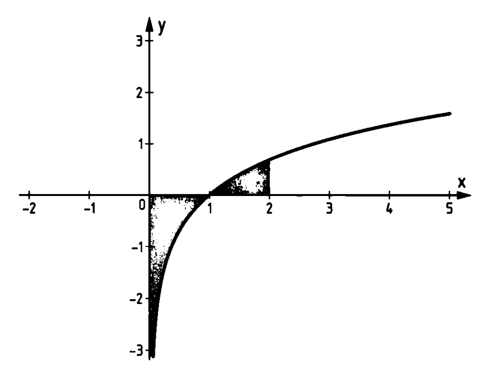
5.137 ***1)*** kein uneigentliches Integral
Beide Grenzen sind endlich, der Integrand wird im Integrationsbereich nicht unendlich.



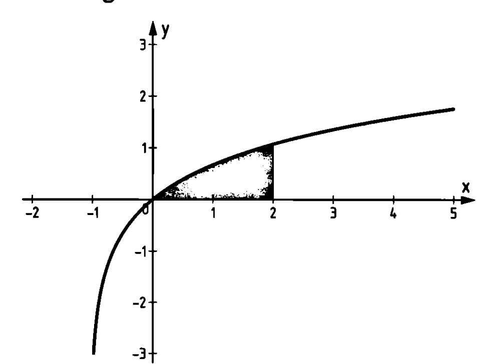
2) uneigentliches Integral
Die Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle.



3) uneigentliches Integral
Für $x \to 0$ gilt $f(x) \to -\infty$.



4) kein uneigentliches Integral
Beide Grenzen sind endlich, der Integrand wird im Integrationsbereich nicht unendlich.



5.138 ***a)*** $\frac{1}{2}$ ***b)*** $\frac{1}{64}$ ***c)*** $+\infty$ ***d)*** $+\infty$

5.139 ***a)*** $+\infty$ ***b)*** $\frac{1}{2}$ ***c)*** $\frac{1}{3e^3}$ ***d)*** $+\infty$

5.140 ***a)*** $+\infty$ ***b)*** 2 ***c)*** 7,559... ***d)*** 2,828...

5.141 ***a)*** π ***b)*** – ***c)*** $+\infty$ ***d)*** –

5.142 ***a)*** 1 ***b)*** 2 ***c)*** –1 ***d)*** $-\frac{1}{4}$

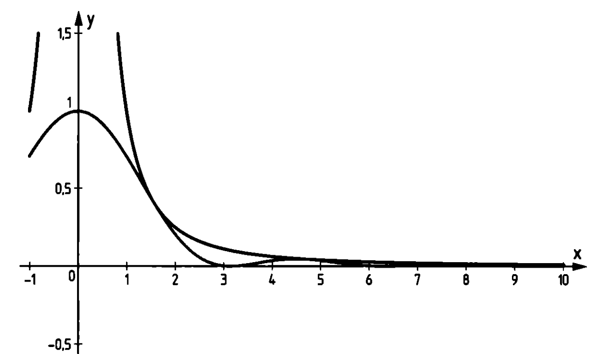
5.143 $\Gamma(3) = 2; \Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2! = 1 \cdot 2 = 2$

5.144 ***1)*** $0{,}000\,433... \frac{1}{\text{Jahre}}$ ***2)*** 2 308,312... Jahre

5.145 $n > 1: \int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{b \to \infty}\left(\int_1^b x^{-n}\,dx\right) = \lim_{b \to \infty}\left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\bigg|_1^b\right) = \frac{1}{1-n} \cdot \left(\lim_{b \to \infty}\left(\frac{1}{b^{n-1}}\right) - \frac{1}{1^{n-1}}\right) = \frac{1}{1-n} \cdot (0 - 1) =$

$= \frac{1}{n-1} \Rightarrow$ konvergent

5.146



Im Intervall $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt für die Sinusfunktion $\sin(x) < x$. Für $x \in \left]0; 1\right]$ folgt daraus $\sin^2(x) < x^2$ bzw. $\frac{\sin^2(x)}{x^2} < 1$. Für $x = 0$ gilt $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right) = 1$. Dies folgt unmittelbar aus $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$. $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ hat daher einen endlichen Wert. Die Grafik bestätigt diese Eigenschaft der zu untersuchenden Funktion. Für Zahlen $x \in \mathbb{R}_0^+$ nimmt der Term $\sin^2(x)$ nur Werte von 0 bis 1 an. Für $x \in \left[1; \infty\right[$ gilt daher $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ verläuft in dem in Aufgabe **5.145** untersuchten Bereich $\left[1; \infty\right[$ zwischen dem Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2}$ und der x-Achse. Wegen der Konvergenz von $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert in diesem Bereich auch das zu untersuchende Integral. Insgesamt folgt daraus die Konvergenz von $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$.

5.147 ***a)*** $\frac{1}{s}$ ***b)*** $\frac{1}{s^2}$

5.149 ***1)*** Richtig. Das bestimmte Integral entspricht bei Berücksichtigung der Nullstellen dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse, da es der Grenzwert von Untersummen bzw. Obersummen ist.

2) Richtig. Da $F(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, muss auch $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ sein. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind auch alle Funktionen der Form $F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$, also auch $F(x) + D$ $(D \in \mathbb{R})$, Stammfunktionen von $f(x)$.

3) Falsch. Das Ergebnis ist eine Zahl bzw. eine Maßzahl mit einer Einheit.

5.150 ***a)*** A, C ***b)*** C ***c)*** B

5.151 ***A)*** Falsch. A_1 ist negativ orientiert und A_2 ist positiv orientiert, richtig muss es daher $-A_1 + A_2$ lauten.

B) Falsch. Da A_1 größer als A_2 ist und da A_1 negativ orientiert ist, gilt $\int\limits_a^b f(x)\,dx < 0$. Das ist ein Widerspruch zu $|A_1 - A_2| > 0$.

C) Richtig. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist die Summe aus der positiv orientierten Fläche A_2 und der mit negativem Vorzeichen versehenen, negativ orientierten Fläche A_1, also $A_2 + (-A_1) = A_2 - A_1$.

D) Falsch. Wegen $A_1 > 0$ bzw. $A_2 > 0$ gilt $|A_1| = A_1$ bzw. $|A_2| = A_2$ und daher $|A_1| - |A_2| = A_1 - A_2$. Laut ***A)*** ist die Behauptung daher falsch.

E) Falsch. Wegen $A_1 > 0$ bzw. $A_2 > 0$ gilt $|A_1| = A_1$ bzw. $|A_2| = A_2$ und daher $|A_1| + |A_2| =$
$= A_1 + A_2 = A_2 + A_1 \neq A_2 - A_1 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Der letzte Schritt wurde in ***C)*** begründet.

F) Falsch. $A_1 + A_2 = A_2 + A_1 \neq A_2 - A_1 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Der letzte Schritt wurde in ***C)*** begründet.

5.152 – 5.169

5.152 ***a)*** $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + C$, $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{11}{3}$ ***c)*** $F(x) = -\cos(x) + C$, $y = 2 - \cos(x)$

b) $F(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C$, $y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 2$

5.153 ***a)*** ***1)*** 0 ***2)*** $8\ E^2$ ***c)*** ***1)*** -6 ***2)*** $15{,}\dot{3}\ E^2$

b) ***1)*** 0 ***2)*** $8\ E^2$ ***d)*** ***1)*** 0 ***2)*** $0{,}693...\ E^2$

5.154 ***a)*** $\frac{x^4}{2} - 4 \cdot e^x + C$ ***b)*** $4 \cdot \sin(t) + \frac{t^2}{2} + C$ ***c)*** $\frac{1}{2} \cdot \ln(|u|) - \cos(u) + C$

5.155 ***a)*** $\frac{2^x}{\ln(2)} + 3 \cdot \ln(|x|) - 2 \cdot e^x + C$ ***b)*** $2 \cdot \tan(t) - 2t^2 + C$ ***c)*** $a \cdot \arctan(s) + \frac{b}{3} \cdot s^3 + c \cdot s + C$

5.156 ***a)*** $x^4 + C$ ***b)*** $-\frac{1}{9x^3} + C$ ***c)*** $\frac{4}{11} \cdot \sqrt[4]{t^{11}} + C$ ***d)*** $9 \cdot \sqrt[3]{r} + C$

5.157 ***a)*** $-0{,}079...$ ***b)*** $10{,}\dot{2}$ ***c)*** $-\frac{8}{7}$

5.158 ***a)*** 4 ***b)*** $-\frac{\pi}{2}$ ***c)*** $31{,}556...$

5.159 ***a)*** $\frac{q\ell^2}{9 \cdot \sqrt{3}}$ ***c)*** $\frac{m}{2} \cdot (v_2{}^2 - v_1{}^2)$ ***e)*** $\frac{aT^2}{2}$

b) mgh ***d)*** $\frac{a^\pi - 1}{\ln(a)}$ ***f)*** $t_2 - t_1 + \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda t_2}} - \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda t_1}}$

5.160 ***1)*** $h(t) = -4{,}905 \cdot t^2 + h_0$

Die Integrationskonstante entspricht dem Wert h_0, das ist die Höhe zum Zeitpunkt $t = 0$.

2) $1{,}106...\ s$; $10{,}849...\ \frac{m}{s}$

5.161 ***A)*** Richtig. Der Gesamtweg ist die Fläche zwischen der dargestellten Kurve und der x-Achse. Diese Fläche ist größer als ein 40 Einheiten hohes und 1 Einheit breites Rechteck ($40 \cdot 1 = 40$).

B) Richtig. Der Weg im Zeitraum $4\ s \leqslant t \leqslant 6\ s$ ist die Fläche zwischen der dargestellten Kurve und der x-Achse im Zeitraum $4\ s \leqslant t \leqslant 6\ s$. Diese Fläche ist größer als ein 15 Einheiten hohes und 2 Einheiten breites Rechteck ($15 \cdot 2 = 30$).

C) Falsch. Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. In der grafischen Darstellung ist das die Steigung der Kurve. Der Betrag der Steigung ist im Wendepunkt am größten. Dieser ist nicht am Anfang der Kurve. Am Anfang der Kurve ist die Steigung null.

D) Richtig. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Wegs nach der Zeit. Daher gilt $s = \int v\, dt$.

5.162 ***a)*** $\frac{1}{3} \cdot e^{3t+1} + C$ ***c)*** $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{a + s^3} + C$ ***e)*** $e^{\sqrt{x}} + C$

b) $\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 2)^4} + C$ ***d)*** $\frac{1}{4} \cdot \sin(2\varphi^2) + C$ ***f)*** $\frac{2}{3} \cdot \ln(|t^3 - 1|) + C$

5.163 ***a)*** $t^2 - \frac{1}{3} \cdot \cos(3t + 1) + C$ ***b)*** $6 \cdot e^{\frac{t}{3}} - t + C$ ***c)*** $2 \cdot \ln(|s + 1|) - \frac{1}{2} \cdot \ln(|s^2 + 3|) + C$

5.164 ***a)*** $\frac{3u - 1}{21} \cdot (u + 2)^6 + C$ ***b)*** $x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} + C$ ***c)*** $t \cdot e^t + C$

5.165 ***a)*** $\ln(|x - 3|) + 4 \cdot \ln(|x + 5|) + C$ ***c)*** $2 \cdot \ln(|x - 2|) - 3 \cdot \ln(|x + 3|) + \ln(|x|) + C$

b) $3 \cdot \ln(|x + 4|) - 3 \cdot \ln(|x - 1|) + C$

5.166 ***a)*** $\frac{\pi}{4}$ ***b)*** $\frac{7}{3}$ ***c)*** 1

5.167 ***a)*** $5\,216{,}926...$ ***b)*** 0 ***c)*** $\frac{1}{2}$

5.168 ***a)*** ***1)*** $\ln(|x - a|) + C$ ***2)*** $-\ln(|x - a|) + C$ ***3)*** $x + a \cdot \ln(|x - a|) + C$

b) ***1)*** $\frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ ***2)*** $\frac{1}{2a} \cdot \ln\left(\left|\frac{x - a}{x + a}\right|\right) + C$ ***3)*** $\frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2 - a|) + C$

5.169 ***a)*** 3 ***b)*** $+\infty$ ***c)*** $\frac{1}{3}$ ***d)*** $4 \cdot \sqrt{2}$ ***e)*** $+\infty$

5.170 ***1)*** $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$ und $\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$

2) $\int x^3 \cdot e^x\,dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C$

$\int x^4 \cdot e^x\,dx = x^4 \cdot e^x - 4x^3 \cdot e^x + 12x^2 \cdot e^x - 24x \cdot e^x + 24 \cdot e^x + C$

$\int x^5 \cdot e^x\,dx = x^5 \cdot e^x - 5x^4 \cdot e^x + 20x^3 \cdot e^x - 60x^2 \cdot e^x + 120x \cdot e^x - 120 \cdot e^x + C$

3) $\int x^n \cdot e^x\,dx = x^n \cdot e^x - n \cdot x^{n-1} \cdot e^x + n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot e^x - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n! \cdot x^1 \cdot e^x + (-1)^n \cdot n! \cdot x^0 \cdot$ $\cdot e^x + C$

1. Schritt: $n = 1 \Rightarrow \int x^1 \cdot e^x\,dx = x^1 \cdot e^x - 1 \cdot x^0 \cdot e^x + C = x \cdot e^x - e^x + C$

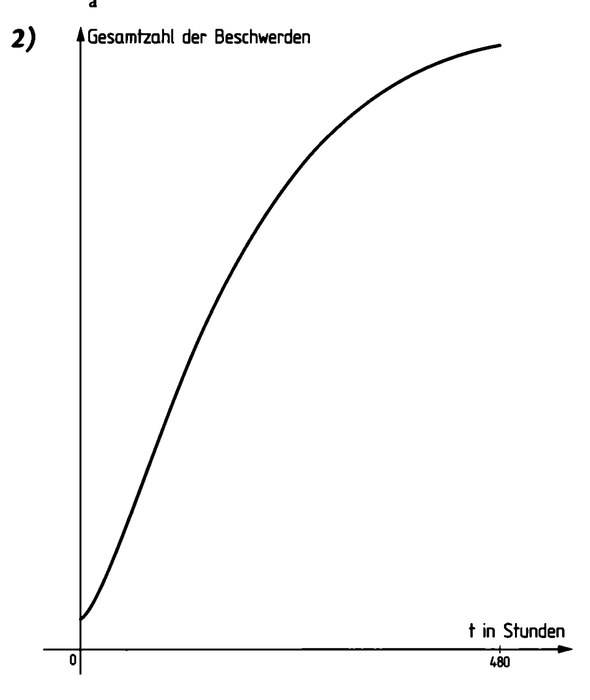
3. Schritt: Partielle Integration von $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx$ mit $u = x^{n+1}$ und $v' = e^x$ ergibt

$\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot \int x^n \cdot e^x\,dx$

Anwenden der Induktionsannahme auf $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx$ ergibt $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx =$
$= x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot x^n \cdot e^x + (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot e^x - \ldots + (-1)^{n+2} \cdot (n+1)! \cdot x \cdot e^x +$
$+ (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot e^x + C = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot (x^n \cdot e^x - n \cdot x^{n-1} \cdot e^x + \ldots +$
$+ (-1)^{n+1} \cdot n! \cdot x \cdot e^x + (-1)^n \cdot n! \cdot e^x) + C = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1) \cdot \int x^n \cdot e^x\,dx$

5.171 ***1)*** $N = \int_a^b f(t)\,dt$

2)



5.172 $\lim_{t \to \infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$ und partielle Integration ergibt

$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st}\,dt = f(t) \cdot e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt =$
$\lim_{t \to \infty} f(t) \cdot e^{-st} - f(0) + s \cdot \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + f(0)$

5.173 $51{,}603\ldots \cdot 10^9$ J

5.174 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1$

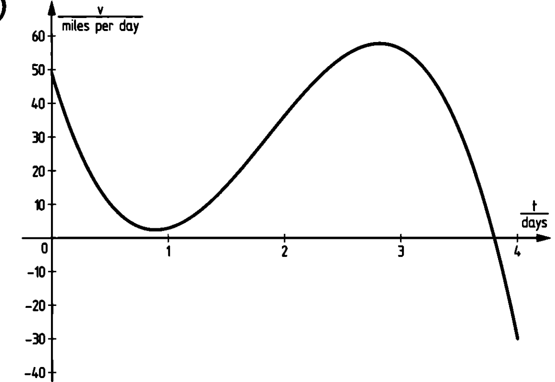
$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,du = \sqrt{\pi}\right.$, siehe Buch Seite 212$\left.\right)$

5.175 ***1)*** $15{,}65625\ E^2$ ***2)*** $8{,}90625\ E^2$

5.176 Using $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $u = \cos(x)$ and $\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin(x)}$ gives $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx =$
$= \int \frac{\sin(x)}{u} \frac{du}{-\sin(x)} = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C$

5.177 $\frac{1}{2}$

5.178 ***1)***



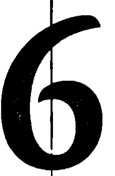
The direction of Frodo's movement has changed at the end of the fourth day.

2) 105 miles

3) 111,595... miles

5.179 $-t^2 \cdot e^{-t} - e^{-t} + C$

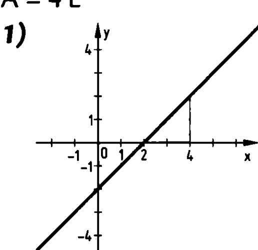
5.180 $4{,}347... \cdot 10^{-18}$ J



Anwendungen der Integralrechnung

6.1 $A = 4\ E^2$

1)



2) Die unerschiedliche Orientierung der beiden Teilflächen muss bei der Berechnung berücksichtigt werden.

6.5 ***a)*** $\int_a^b f(x)\,dx + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$ ***b)*** $\int_0^{x_1} g(t)\,dt + \left|\int_{x_1}^e g(t)\,dt\right|$ ***c)*** $\left|\int_a^b h(x)\,dx\right|$

6.6 ***a)*** $\int_{x_1}^{x_3} [g(x) - f(x)]\,dx$

b) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]\,dx$

c) $\int_a^b [f(x) - h(x)]\,dx + \int_b^c [g(x) - h(x)]\,dx$

6.7 ***a)*** ***1)*** $\int_0^a (c - 2x)\,dx$ ***2)*** $\int_0^c \frac{y}{2}\,dy$

b) ***1)*** $\int_0^3 (-x^2 + 9)\,dx$ ***2)*** $\int_0^9 \sqrt{y - 9}\,dy$

c) ***1)*** $\int_0^2 (4 - 0{,}5x^3)\,dx$ ***2)*** $\sqrt[3]{2} \cdot \int_0^4 \sqrt[3]{y}\,dy$

6.8 ***a)*** $4{,}5\ E^2$ ***b)*** $7{,}5\ E^2$ ***c)*** $18\ E^2$

Die elementare Berechnung ist jeweils weniger aufwändig.

6.9 ***a)*** $5{,}1\dot{6}\ E^2$ ***b)*** $5\ E^2$ ***e)*** $20{,}41\dot{6}\ E^2$

b) $4{,}75\ E^2$ ***d)*** $11{,}\dot{3}\ E^2$ ***f)*** $0{,}\dot{6}\ E^2$

6.10 ***a)*** $0{,}5\ E^2$ ***b)*** $0{,}5\ E^2$ ***c)*** $4\ E^2$ ***d)*** $2{,}172...\ E^2$

6.11 ***a)*** $4\ E^2$ ***b)*** $2\ E^2$

6.12 ***a)*** $\frac{\pi}{2}\ E^2$ ***b)*** $\frac{\pi}{3}\ E^2$

6.13 ***a)*** $9\ E^2$ ***b)*** $2{,}314...\ E^2$

6.14 ***a)*** $9\ E^2$ ***b)*** $16\ E^2$

6.15 ***a)*** $32{,}75\ E^2$ ***b)*** $8\ E^2$

6.16 ***a)*** $8\ E^2$ ***b)*** $11{,}8\dot{3}\ E^2$

6.17 ***a)*** $0{,}\dot{3}\ E^2$ ***b)*** $1{,}\dot{3}\ E^2$

6.18 ***a)*** $0{,}094...\ E^2$ ***b)*** $0{,}187\,5\ E^2$

6.19 ***a)*** $5{,}656...\ E^2$ ***b)*** $2{,}255...\ E^2$

6.20 ***a)*** $2{,}\dot{6}\ E^2$ ***b)*** $1\ E^2$ ***c)*** $4\ E^2$

6.21 $b = 1{,}609...$

Für die Berechnung des Flächeninhalts gilt $A = \int_0^b e^x\,dx$. Anwenden der Rechenregeln für das Integrieren und Einsetzen der Grenzen b und 0 ergibt die Gleichung $4 = e^b - 1$. Umformen auf $e^b = 5$ und Lösen der Gleichung durch Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen ergibt den Wert $b = \ln(5)$.

6.22 – 6.33

6.22 $x = 1{,}427...$

6.23 $1{,}125\ E^2$

6.24 ***a)*** $12{,}375\ E^2$ ***b)*** $54\ E^2$

6.25 ***1)*** $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, t_w: $y = x - \frac{1}{3}$ ***2)*** $1{,}41\dot{6}\ E^2$

6.26 $f(x) = \frac{8}{3}x^2 - \frac{32}{3}x + \frac{44}{3}$

6.27 $f_1(x) = \frac{x^4}{5} - x^3$, $f_2(x) = -\frac{x^4}{5} + x^3$

6.28 ***A)*** Richtig. Das Integral ergibt den Flächeninhalt zwischen der roten Kurve und der x-Achse im Intervall $[0; \pi]$. Das ist ein Viertel der Gesamtfläche. Multiplikation mit vier führt daher auf ein richtiges Ergebnis.

B) Falsch. Das Integral berechnet die „orientierten" Flächeninhalte zwischen der roten Kurve und der x-Achse im Intervall $[0; 2\pi]$. Da der Flächeninhalt im Intervall $[0; \pi]$ gleich groß wie im Intervall $[\pi; 2\pi]$ ist und die Vorzeichen der beiden Flächeninhalte verschieden sind, ist das Ergebnis des Integrals null.

C) Richtig. Das erste Integral ergibt den Flächeninhalt zwischen der roten Kurve und der x-Achse im Intervall $[0; \pi]$. Multiplikation mit zwei ergibt den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven im Intervall $[0; \pi]$. Das zweite Integral ergibt den Flächeninhalt zwischen der roten Kurve und der x-Achse mit negativem Vorzeichen. Multiplikation mit zwei ergibt den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven im Intervall $[\pi; 2\pi]$ mit negativem Vorzeichen. Subtraktion des negativen Teilergebnisses führt daher auf das richtige Ergebnis.

6.29 ***1)*** $f(x) = \frac{1}{8}x^2$

2) $17\,066{,}\dot{6}\ m^3$

3) Schätzung ***B)***. Die Berechnung ergibt 35,355... %.

4) 1,206... m

6.30 ***1)*** $0{,}07\ m^2$

2) 151,9 kg

3) Für die Trennklötze mit dreieckiger Querschnittsfläche wird um 1,025... % weniger Material benötigt.

6.31 ***1)*** $a = 2{,}5$, $b = -3{,}6$

2) 12 L grüne Farbe (11,770...) bzw. 13 L blaue Farbe (12,229...)

6.32 $40{,}\dot{6}\ m^2$

6.33 ***1)*** Die beiden Windungen des angegebenen Flussverlaufs entsprechen dem Tiefpunkt bzw. dem Hochpunkt einer Polynomfunktion dritten Grads.

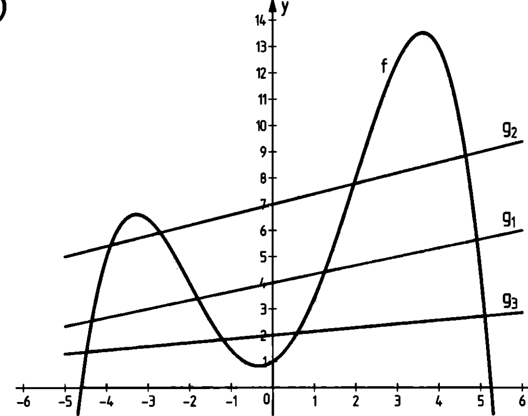
2) Wegen des in der Abbildung angegebenen Koordinatensystems beschreibt die gesuchte Polynomfunktion dritten Grads den Verlauf des unteren Flussufers, wenn sie an der Stelle $x_1 = 0$ eine zweifache Nullstelle bzw. $x_2 = 360$ eine einfache Nullstelle hat. Einsetzen der Nullstellen in die Linearfaktorzerlegung $ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ ergibt $f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 0) \cdot (x - 360) = a \cdot x^2 \cdot (x - 360)$.

$a = -\frac{1}{148\,500}$

3) 14 908 200,00 €

6.34 ***1)*** 41,652... %
2) 3 561,29 € (3 561,288...)
3) Durch das Strecken in x-Richtung vergrößern sich beide Flächen um den Faktor 1,1 und durch das Strecken in y-Richtung nochmals um den Faktor 1,1. Insgesamt werden beide Flächen daher um den Faktor $1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$ vergrößert. Das Verhältnis der beiden Flächen verändert sich daher nicht und der Prozentsatz aus ***1)*** bleibt gleich.
Die Berechnung ergibt für den gestreckten Flächeninhalt der Gesamtfläche $A_1 = 36{,}505...\ \text{cm}^2$ und für den gestreckten Flächeninhalt der Zirkonfläche $A_2 = 15{,}205...\ \text{cm}^2$. Daraus ergibt sich für das Verhältnis der beiden gestreckten Flächeninhalte $\frac{A_2}{A_1} = 0{,}416...$. Es werden daher auch nach der Streckung 41,652... % der Gesamtfläche des Stirnteils durch den Zirkon verdeckt.

6.35 ***1)*** 2,507...
2)



g_1 erfüllt die Bedingung.

3) Für den Flächeninhalt der kleineren Fläche ergeben sich folgende Prozentsätze:
A) 43,168... %, ***B)*** 16,496... %, ***C)*** 31,785... %.
Das Ergebnis aus ***2)*** ist daher richtig.

6.36 ***a)*** $3{,}436...\ E^2$ ***b)*** $4{,}158...\ E^2$ ***c)*** $4{,}002...\ E^2$ ***d)*** $1{,}138...\ E^2$

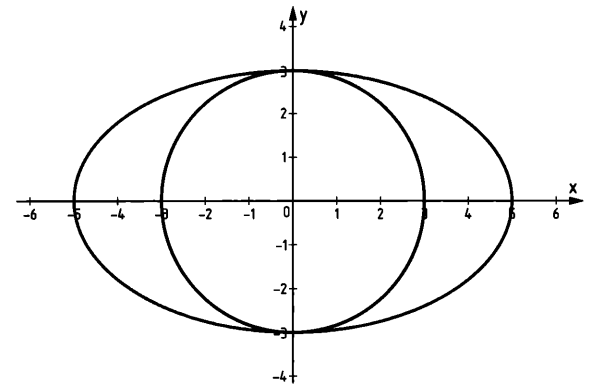
6.37 ***a)*** $1{,}247...\ E^2$ ***b)*** $3{,}718...\ E^2$ ***c)*** $1{,}272...\ E^2$ ***d)*** $6{,}809...\ E^2$

6.38 ***a)*** $\frac{\pi}{2}\ E^2$ ***b)*** $1\ E^2$ ***c)*** $\frac{24}{\pi}\ E^2$

6.39 ***a)*** $x = 0{,}412...$ ***b)*** $y = 1$

6.40 ***a)*** $4{,}566...\ \text{cm}^2$ ***b)*** $\frac{\pi - 2}{4} \cdot r^2 = 0{,}285... \cdot r^2$

6.41



Der gesuchte Flächeninhalt ist die Differenz des Flächeninhalts der Ellipse und des Flächeninhalts des Kreises mit dem Radius r = 3 E. Die Ellipse besteht aus vier gleich großen Teilen. Es genügt daher, den Flächeninhalt zwischen der Ellipse und der x-Achse im Intervall [0; 5] zu berechnen und mit vier zu multiplizieren.
Für den gesamten Flächeninhalt gilt daher
$A = 4 \cdot \int_0^5 \sqrt{\frac{225 - 9x^2}{25}}\, dx - 3^2 \cdot \pi = 18{,}849...\ E^2.$

6.42 Aus hyp: $x^2 - y^2 = 1$ folgt für die Kurve im 1. Quadranten $y = \sqrt{x^2 - 1}$ und sei $P(x_0|y(x_0))$ der den Hyperbelsektor im 1. Quadranten begrenzende Hyperbelpunkt.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks $0x_0P$ gilt $A_\Delta = \frac{x_0 \cdot y(x_0)}{2} = \frac{x_0 \cdot \sqrt{x^2-1}}{2}$.

Für die von der Hyperbel, der x-Achse und der senkrechten Gerade an der Stelle x_0 eingeschlossene Fläche gilt

$$A_{hyp} = \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(|x_0|)\right)\Big|_1^{x_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 \cdot \sqrt{x_0^{\ 2} - 1} - \operatorname{arcosh}(x_0)\right).$$

Für den Hyperbelsektor gilt daher

$$A_{Sektor} = 2 \cdot \left(\frac{x_0 \cdot \sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(x_0)\right)\right) = \operatorname{arcosh}(x_0).$$

6.43 Ist die Schnittfläche auf jeder Höhe kongruent zur Grundfläche, so ist das Volumen das Produkt aus Grundfläche und Höhe.
Verkleinert sich die Schnittfläche mit zunehmender Höhe quadratisch zu einer Spitze, so ist das Volumen ein Drittel des Produkts aus Grundfläche und Höhe.

6.44 ***1)*** Das Rad setzt sich aus drei Drehzylindern zusammen, deren Radien in y-Richtung und deren Höhen in x-Richtung aus der Schnittdarstellung abgelesen werden können. Der Radius des linken Zylinders beträgt 10 cm, die Höhe 5 cm. Der Radius des mittleren Zylinders beträgt 30 cm, die Höhe 10 cm. Der Radius des rechten Zylinders beträgt 20 cm, die Höhe 5 cm.
Für das Volumen des Rads gilt daher
$V = [(10\text{ cm})^2 \cdot 5\text{ cm} + (30\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} + (20\text{ cm})^2 \cdot 5\text{ cm}] \cdot \pi = 36\,128{,}315...\text{ cm}^3$.
2) 283,607... kg

6.47 ***1)*** Drehkegel ***2)*** Kegelstumpf

6.48 ***1)*** y-Achse ***2)*** x-Achse ***3)*** y-Achse

6.49 ***a) 1) 2)*** kegelförmig mit doppelt gekrümmter Mantelfläche
b) 1) aus einem Drehzylinder und einem kegelförmigen Objekt mit doppelt gekrümmter Mantelfläche zusammengesetzt
2) kegelstumpfförmig mit doppelt gekrümmter Mantelfläche
c) 1) Drehzylinder mit Einstülpung
2) kegelförmig mit doppelt gekrümmter Mantelfläche
d) 1) kegelstumpfförmig mit spitzer Einstülpung
2) kegelstumpfförmig mit doppelt gekrümmter Mantelfläche und kegelförmiger Einstülpung

6.50 ***a)*** 16,493... E^3 ***b)*** 45,238... E^3

6.51 Berechnung des Integrals $\pi \cdot \int_{r-h}^{r} \left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 dy$ ergibt $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$.

6.52 ***a)*** 25,132... E^3 ***b)*** 78,749... E^3

6.53 ***a)*** 23,370... E^3 ***b)*** 40,143... E^3 ***c)*** 2,467... E^3

6.54 ***a)*** 50,265... E^3 ***b)*** 11,394... E^3 ***c)*** 53,197... E^3

6.55 ***a)*** $A(h) = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{256}$, $V = 10{,}392...\text{ cm}^3$
b) $A(h) = \frac{5}{16} \cdot h^2$, $V = 53{,}\dot{3}\text{ cm}^3$

Die Berechnung mit elementaren Formeln liefert jeweils dasselbe Ergebnis.

6.56 ***a)*** 430,005… E^3 ***b)*** 163,828… E^3

6.57 ***a)*** $\frac{4\pi}{3} \cdot a \cdot b^2$ ***b)*** $\frac{4\pi}{3} \cdot a^2 \cdot b$

6.58 Beim Umformen der Gleichung $y = (x - 4)^2$ auf x gibt es zwei Lösungen. Die von Erik verwendete Lösung beschreibt den in der Abbildung schwarz dargestellten rechten Teil des Graphs. Um den rot dargestellten Teil des Graphs zu erhalten, hätte Erik für die Integration die Gleichung $x = 4 - \sqrt{y}$ verwenden müssen.
Ein weiterer Fehler ist Erik bei der Berechnung mittels Technologieeinsatz passiert. Bei der Eingabe hat Erik vergessen, den Term $4 + \sqrt{y}$ zu quadrieren.
Für das Volumen hätte Erik richtig $V = \pi \cdot \int_0^4 (4 - \sqrt{y})^2\,dy \approx 92\ E^3$ erhalten.

6.59 ***1)*** 188,126… mℓ
2) Nein. Die Füllhöhe beträgt bei 0,5 L Inhalt 10,257… cm, das ist mehr als 10 cm.

6.60 ***1)*** $f_1(x) = 6$, $f_2(x) = -\frac{7}{338}x^2 + \frac{28}{169}x + \frac{958}{169}$, $f_3(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{188}{3}$
2) 1 188,499… g ≈ 1,20 kg
3) 50,872… %

6.61 ***1)*** 1,488… L ***2)*** 20,202… cm

6.62 $f_1(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$; $f_2(x) = -\frac{22}{27}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{9}{2},\ 2 \leqslant x \leqslant 4$; m = 32,702… g

6.63 413,323… g

6.64 ***1)*** $f_1(x) = 3x,\ 0 \leqslant x \leqslant 10$; $f_2(x) = \frac{1}{1800}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 2x + \frac{145}{9},\ 10 \leqslant x \leqslant 80$
2) $32{,}\dot{2}$ mm ***3)*** 1 338,795… g

6.66 ***a)*** Berechnen der Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen der beiden Funktionen durch Lösen der Gleichung $x - 2 = \sqrt{x}$ und Einsetzen des Ergebnisses zB in $y_1 = x - 2$ ergibt (4|2).
1) Berechnen der Nullstellen beider Funktionen durch Lösen der Gleichungen $0 = \sqrt{x}$ bzw. $0 = x - 2$ ergibt für y_1 die Nullstelle x = 2 bzw. für y_2 die Nullstelle x = 0.
Berechnen des Volumens mit $\pi \cdot \left[\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx - \int_2^4 (x - 2)^2\,dx\right]$ ergibt $V_x = 16{,}755\ldots\ E^3$.
2) Umformen der Funktionsgleichung $y = x - 2$ auf $x = y + 2$ bzw. der Funktionsgleichung $y = \sqrt{x}$ auf $x = y^2$.
Berechnen des Volumens mit $\pi \cdot \left[\int_0^2 (y + 2)^2\,dy - \int_0^2 y^2\,dy\right]$ ergibt $V_y = 38{,}536\ldots\ E^3$.

b) Berechnen der Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen der beiden Funktionen durch Lösen der Gleichung $\frac{1}{2}x^2 = 4 - x$ und Einsetzen des Ergebnisses zB in $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ ergibt (2|2).
1) Berechnen der Nullstellen beider Funktionen durch Lösen der Gleichungen $0 = \frac{1}{2}x^2$ bzw. $0 = 4 - x$ ergibt für y_1 die Nullstelle x = 0 bzw. für y_2 die Nullstelle x = 4.
Berechnen des Volumens mit $\pi \cdot \left[\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx + \int_2^4 (4 - x)^2\,dx\right]$ ergibt $V_x = 13{,}404\ldots\ E^3$.
2) Umformen der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ auf $x = \sqrt{2y}$ bzw. der Funktionsgleichung $y = 4 - x$ auf $x = 4 - y$.
Berechnen des Volumens mit $\pi \cdot \left[\int_0^2 (4 - y)^2\,dy - \int_0^2 \left(\sqrt{2y}\right)^2 dy\right]$ ergibt $V_y = 46{,}076\ldots\ E^3$.

c) Berechnen der Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen der beiden Funktionen durch Lösen der Gleichung $x^2 = x^2 - 8x + 16$ und Einsetzen des Ergebnisses zB in $y_1 = x^2$ ergibt (2|4).

1) Berechnen der Nullstellen beider Funktionen durch Lösen der Gleichungen $0 = x^2$ bzw. $0 = x^2 - 8x + 16$ ergibt für y_1 die Nullstelle x = 0 bzw. für y_2 die Nullstelle x = 4.

Berechnen des Volumens mit $\pi \cdot \left[\int_0^2 (x^2)^2\,dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16)^2\,dx\right]$ ergibt $V_x = 40{,}212...\ E^3$.

2) Umformen der Funktionsgleichung $y = x^2$ auf $x = \sqrt{y}$ bzw. der Funktionsgleichung $y = x^2 - 8x + 16$ auf $x = \sqrt{y} - 4$.

Berechnen des Volumens mit $\pi \cdot \left[\int_0^4 (\sqrt{y} - 4)^2\,dy - \int_0^4 (\sqrt{y})^2\,dy\right]$ ergibt $V_y = 67{,}020...\ E^3$.

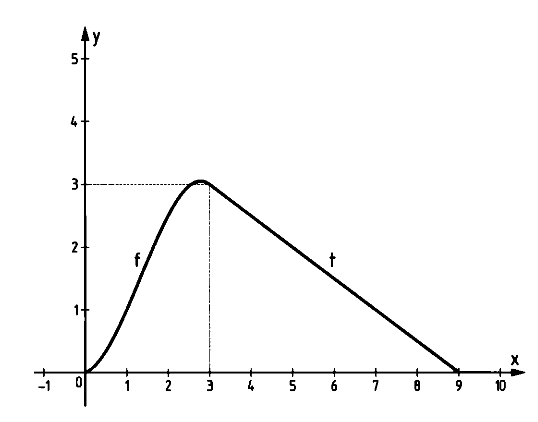
6.67 *a)* $0{,}942...\ E^3$ *b)* $67{,}858...\ E^3$ *c)* $537{,}212...\ E^3$

6.68 $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 6$, $V_x = 21{,}258...\ E^3$

6.69 *1)* t: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, b = 9

2) $94{,}214...\ m^3$

3) Das Volumen wird um 41,397... % kleiner.



6.70 *1)* 16,004... cm

2) Adnan hat mehr Gewinn erwirtschaftet. Der Unterschied beträgt 0,94 € (0,943...).

6.71 0,420... kg

6.72 5,841... m

6.74 *a)* 11,531... E *b)* 9,073... E *c)* 7,253... E

6.75 *a)* 3,620... E *b)* 5,915... E *c)* 29,205... E

6.76 *a)* 1,910... E *b)* 2,555... E *c)* 2,290... E

6.77 *1)* $y = \frac{3}{8\,192} \cdot x^2$ *2)* 1 325,439... m

3) 2 051,997... m (Stützweite: 1 991 m, Durchhang des Seils: 216,3 m)

4)

	Golden Gate Bridge	Akashi-Kaikyo-Brücke
Gleichung der Kurve	$y = 1\,389{,}637... \cdot \cosh\left(\frac{x}{1\,389{,}637...}\right)$	$y = 2\,326{,}028... \cdot \cosh\left(\frac{x}{2\,326{,}028...}\right)$
Bogenlänge	1 325,731... m	2 052,340... m
absolute Differenz	0,292... m	0,343... m
relative Differenz	0,0220... %	0,0167... %

6.78 ***1)*** b = 230,921... m; s = 455,235... m ***2)*** 13 657,071... m²
(Unter Verwendung des exakten Werts −38,921 59... und unter der Annahme der horizontalen Achse auf der Höhe des Bodens und der vertikalen Achse in der Mitte des Bogens.)

6.80 $y = \frac{r}{h} \cdot x \Rightarrow M_x = 2\pi \cdot \int_0^h \frac{r}{h} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx = ... = \pi \cdot r \cdot s$
Das Ergebnis entspricht der elementaren Formel.

6.81 $x = \sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow M_y = 2\pi \cdot \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, dy = ... = 2\pi \cdot r \cdot h$
Das Ergebnis entspricht der elementaren Formel.

6.82 15,317... m^2

6.83 186,517... L

6.84 ***1) A)*** einschaliges Drehhyperboloid ***B)*** zweischaliges Drehhyperboloid
2) a) 248,967... E^2 ***b)*** 198,797... E^2

6.85 Minimalfläche: 17,677... E^2; Mantelfläche des Zylinders: 19,390... E^2

6.90 $S\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{b}{2}\right)$

6.91 S(2,285...|1,285...)
Auf die Darstellung der Überprüfung durch elementare Berechnungen wird verzichtet.

6.92 ***a)*** S(2,4|0,75) ***b)*** S(1,75|1,7) ***c)*** S(3,020...|4,520...) ***d)*** $S\left(\frac{8}{9}\middle|\frac{14}{9}\right)$

6.93 $S(0{,}3d^2|0{,}75d)$

6.94 S(0|0,6c)

6.95 ***a)*** S(0|2) ***b)*** S(−1|2,6)

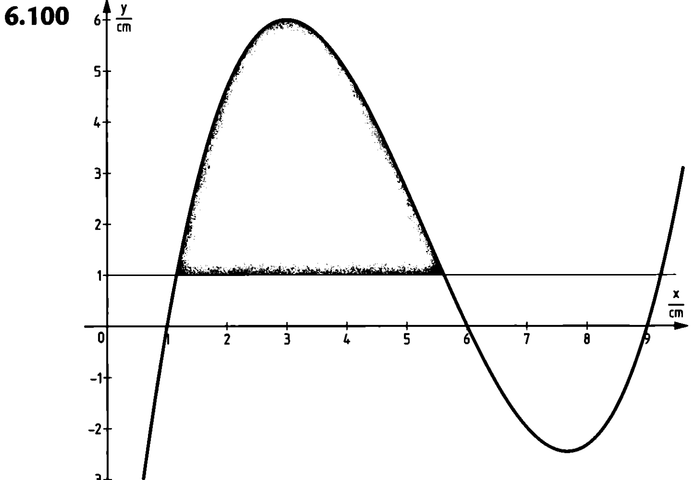
6.96 ***a)*** $S(2,\dot{4}|1,\dot{3})$ ***b)*** S(0,827...|0,958...) ***c)*** S(0|1,342...)

6.97 ***a)*** $S(2,\dot{4}|1,\dot{6})$ ***b)*** S(2|1,294...) ***c)*** $S(2,7\dot{3}|1,3\dot{1})$

6.98 ***a)*** S(2,071...|2,561...) ***b)*** S(0|1,921...)

6.99 ***a)*** S(0,371...|0,454...) ***b)*** S(1,570...|0,392...) ***c)*** S(0,157...|0,713...)

6.100



Benötigte Teigmasse:
290,424... mℓ

6.101 Für den Halbkreis gilt $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Wegen der Symmetrie des Halbkreises bezüglich der y-Achse muss $x_S = 0$ gelten.
Berechnung von y_S mit Hilfe der 1. Guldin'schen Regel ergibt

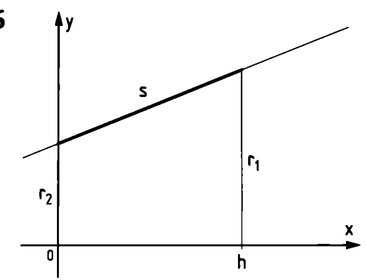
$$y_s = \frac{V_x}{2\pi \cdot A} = \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4r}{3\pi}$$

$S\left(0\,\middle|\,\frac{4}{3\pi} \cdot r\right)$

6.102 248,814... g

6.103 $V = \frac{1}{4}\pi^2 E^3 = 2{,}467...\, E^3$

6.106



Ein Kegelstumpf mit den Radien r_1, r_2 und der Höhe h wird von der Funktion $y = \frac{r_1 - r_2}{h} \cdot x + r_2$ bei der Rotation um die x-Achse erzeugt.

Für die Länge der Mantellinie gilt $s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

Laut der 2. Guldin'schen Regel gilt für die Mantelfläche

$M = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot s$ mit $y_s = \frac{M_x}{s}$ und $M_x = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$.

$$M_x = \int_0^h \left(\frac{r_1 - r_2}{h} \cdot x + r_2\right) \cdot \frac{\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}{h}\,dx = \frac{\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}{h} \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{2h} \cdot x^2 + r_2 \cdot x\right)\Big|_0^h =$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}}{h} \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{2h} \cdot h^2 + r_2 \cdot h\right) = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow y_s = \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow$$

$$M = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot s = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$$

Die Formel ist richtig.

6.107 $S\left(\frac{h}{2}\,\middle|\,\frac{r}{2}\right)$

6.108 ***a)*** S(0|1,823...) ***b)*** S(1,570...|0,600...) ***c)*** S(0|2,156...)

6.109 ***a)*** $S\left(\frac{3}{8} \cdot r|0|0\right)$ ***b)*** $S\left(\frac{3}{4} \cdot h|0|0\right)$

6.110 $S\left(\frac{9}{8}|0|0\right)$

6.111 S(2,4|0|0)

6.112 Für das Volumen einer Zylinderscheibe gilt $dV = \pi y^2 dx$, für deren Masse $dm = \rho \cdot dV$.
Einsetzen in die Formel für den Schwerpunkt ergibt

$$x_s = \frac{1}{m} \cdot \int_m x\,dm = \frac{1}{\rho \cdot V} \cdot \int_a^b x \cdot \rho \cdot \pi \cdot y^2\,dx = \frac{\pi \cdot \int_a^b xy^2\,dx}{V}.$$

Der Zähler ist das statische Moment M_{yz}. Daraus ergibt sich: $x_S = \frac{M_{yz}}{V}$

6.113 ***1)*** $2{,}\dot{6}\,\frac{mm}{h}$ ***2)*** $22{,}\dot{6}\,\frac{mm}{h}$ ***3)*** $8{,}538...\,\frac{mm}{h}$

6.117 ***a) 1)*** 3 ***2)*** 3,193... ***b) 1)*** $\frac{2}{\pi}$ ***2)*** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ***c) 1)*** 19,085... ***2)*** 24,569...

6.118 ***1)*** $\mu = 0$, $\mu_{abs} = \frac{2}{\pi}$

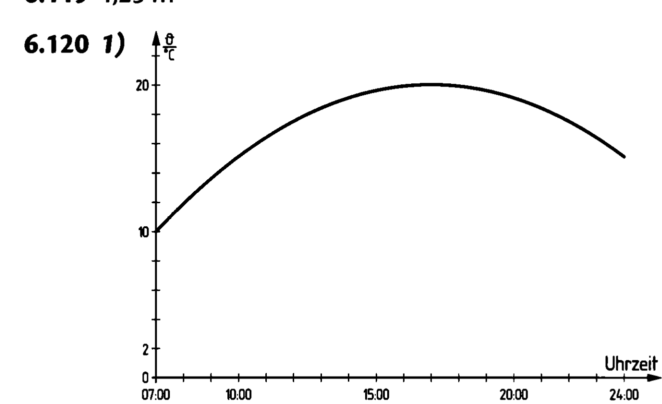
Die Summe der mit $\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$ berechneten orientierten Flächeninhalte ist null, μ ist daher null. Mit $\int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx$ werden zwei Teilflächen berechnet, die wegen $|\cos(x)| \geqslant 0$ beide positiv orientiert sind. Die Summe der beiden Teilflächen, und daher auch μ_{abs}, ist von null verschieden.

2) $\mu = 0$, $\mu_{abs} = \frac{2}{\pi}$

Die Summe der mit $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$ berechneten orientierten Flächeninhalte ist null, μ ist daher null. Mit $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx$ werden zwei Teilflächen berechnet, die wegen $|\sin(x)| \geqslant 0$ beide positiv orientiert sind. Die Summe der beiden Teilflächen, und daher auch μ_{abs}, ist von null verschieden.

6.119 1,25 m

6.120 ***1)***



2) $17{,}3\dot{6}$°C (Mittelwert von 7:00 Uhr bis 24:00 Uhr)

3) Der Mittelwert wird um 5°C größer.

$\frac{1}{17-0} \cdot \int_0^{17} (-0{,}1t^2 + 2t + 15)\,dt =$

$= 22{,}3\dot{6}\,°C = 17{,}3\dot{6}\,°C + 5°C$

6.121 ***1)*** Fahrtstrecken werden zurückgefahren. ***2)*** $41{,}25\,\frac{km}{h}$

3) Das Auto hat 5,5 km zurückgelegt und ist 4,5 km vom Ausgangspunkt entfernt.

6.122 ***a)*** $\mu = 6{,}6$, $\mu_{abs} = 7{,}8$, $\mu_Q = 8{,}899...$

b) $\mu = 1$, $\mu_{abs} = 1$, $\mu_Q = 1{,}154...$

c) $\mu = 2{,}5$, $\mu_{abs} = 4{,}1\dot{6}$, $\mu_Q = 5$

d) $\mu = 1{,}136...$, $\mu_{abs} = 1{,}136...$, $\mu_Q = 1{,}290...$

6.123 $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (k \cdot x + d)\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k \cdot x^2}{2} + d \cdot x\right)\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k \cdot b^2}{2} + d \cdot b - \left(\frac{k \cdot a^2}{2} + d \cdot a\right)\right) =$

$= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot (b^2 - a^2) + d \cdot (b-a)\right) = \frac{k}{2} \cdot (b+a) + d$

a) $\frac{k}{2} \cdot (b+a) + d = k \cdot \frac{a+b}{2} + d = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

b) $\frac{k}{2} \cdot (b+a) + d = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot a + k \cdot b) + d = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot a + k \cdot b + 2d) = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot a + d + k \cdot b + d) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (f(a) + f(b))$

6.128 ***a)*** $\frac{4\pi^3}{3} \cdot a^2 = 41{,}341... \cdot a^2$ ***b)*** $\frac{3}{4\pi} \cdot a^2 = 0{,}238... \cdot a^2$

6.129 ***a)*** $125{,}663...\ cm^2$ ***b)*** $a \cdot b \cdot \pi$

6.130 $4{,}2\dot{6}\ E^2$

6.131 $18{,}849...\ E^2$

6.132 $596{,}254...\ mm^2$

6.133 24 E

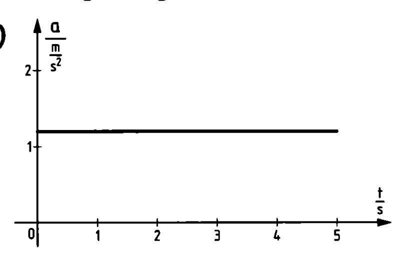
6.134 8r E

6.135 21,256... · a

6.136 ***1)*** A → I, B → III

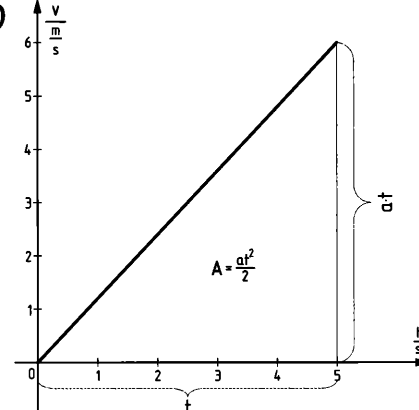
2) Zu empfehlen wäre Form I), da die Bogenlänge von Form I) mit 379,613... m etwas kleiner ist als die Bogenlänge von Form III) mit 384,189... m.

6.137 ***1)***



2) $A = v = 6\,\frac{m}{s}$.
Der Flächeninhalt unter der Kurve von t = 0 s bis t = 5 s entspricht der Geschwindigkeit nach 5 s, berechnet mit der angegebenen Formel $v = a \cdot t$.

3)



Der zurückgelegte Weg s entspricht dem Flächeninhalt A zwischen der Funktion $v = a \cdot t$ und der waagrechten Achse. Die Fläche hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen t und $a \cdot t$.
Für s bzw. für A gilt daher
$s = A = \frac{t \cdot a \cdot t}{2} = \frac{a}{2} \cdot t^2$.

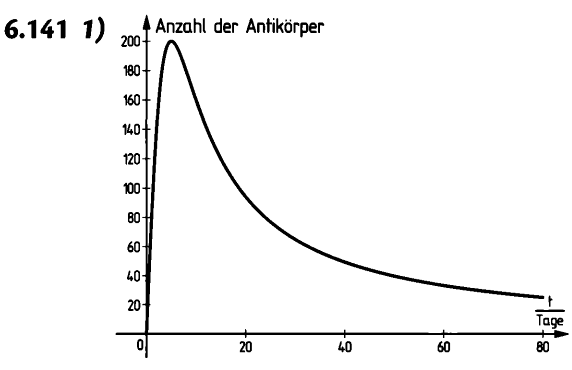
6.139 ***1)***

2) Der Inhalt der rechteckigen Fläche zwischen dem Graph der Beschleunigungsfunktion a und der waagrechten Achse entspricht der Geschwindigkeit v. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zwischen dem Graph der Geschwindigkeitsfunktion v und der waagrechten Achse entspricht dem zurückgelegten Weg s.

6.140 ***1)*** Grafik ***B)***.
Der Beginn des Bremsvorgangs wird nicht plötzlich eingeleitet, dh der Druck aufs Bremspedal wird gleichmäßig erhöht.
Die Verzögerung wird, beginnend mit $0\,\frac{m}{s^2}$, größer, die Geschwindigkeit verringert sich daher langsam beginnend immer stärker.
Danach wird das Fahrzeug einige Zeit mit konstanter Verzögerung abgebremst, daraus ergibt sich der lineare Verlauf im mittleren Teil der dargestellten Geschwindigkeitskurve.
Um das Fahrzeug nicht abrupt zum Stillstand zu bringen, wird der Druck aufs Bremspedal gegen Ende des Bremsvorgangs gleichmäßig verringert und die Verzögerung wird kleiner.
Die Geschwindigkeit verringert sich daher immer langsamer, bis sie schließlich null ist.

2) Nein, das Auto benötigt beim angegebenen Bremsverlauf 40 m bis zum Stillstand.

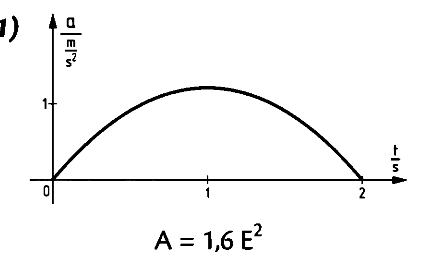
6.141 ***1)***



Der Graph der Funktion ist von t = 0 bis t = 5 Tage stark ansteigend, hat bei t = 5 Tage einen Hochpunkt und nähert sich dann zuerst rasch und danach immer langsamer der waagrechten Achse. (Die waagrechte Achse ist eine Asymptote der Kurve.)

2) 1 609 (1 609,437...) bzw. 3 477 Antikörper (3 476,923...)

6.142 ***1)***



A = 1,6 E^2

2) t = 2 s, v = 1,6 $\frac{m}{s}$

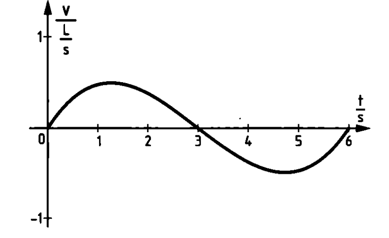
3) Integrieren der Beschleunigungsfunktion a(t) ergibt die Geschwindigkeitsfunktion v(t). Berechnung der Nullstellen von v(t).
Der zurückgelegte Weg eines Wägelchens entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graph der Geschwindigkeitsfunktion und der waagrechten Achse zwischen den Nullstellen von v(t).
s = 2,7 m

6.143 ***1)*** In diesem Bereich fährt das Schienenfahrzeug in die entgegengesetzte Richtung.
2) Gesamtweg: 6 243,957... m, Entfernung zum Startpunkt: 5 028,829... m

6.144 ***1)*** Die Funktion g(t) gibt an, wie viel Wasser bei der Betätigung der Spülung bis zum Zeitpunkt t verbraucht worden ist.
2) $t = \frac{2}{3}$ s, 0,516... L
3) 1,94$\dot{6}$... L bzw. 1,9$\dot{5}$ L

6.145 ***1)*** Die Luft strömt von t = 0 bis t = 2 s mit steigender Geschwindigkeit in die Lunge. Die Geschwindigkeit erreicht bei t = 2 s ihr Maximum. Von t = 2 s bis t = 4 s sinkt die Geschwindigkeit auf null.
Beim Ausatmen strömt die Luft von t = 4 s bis t = 6 s immer schneller aus der Lunge, was durch eine sinkende negative Geschwindigkeit angezeigt wird.
Die Geschwindigkeit erreicht bei t = 6 s ihr Minimum. Von t = 6 s bis t = 8 s steigt die negative Geschwindigkeit auf null, die Luft strömt immer langsamer aus der Lunge.

2) $v(t) = -0{,}15t^2 + 0{,}6t$
3) $L(t) = -0{,}05t^3 + 0{,}3t^2$
4) $v(t) = \frac{4}{81} \cdot t^3 - \frac{4}{9} \cdot t^2 + \frac{8}{9} \cdot t$



5) 0,691... L bzw. 0,419... L

6.146 ***1)*** 1 175,362... m ***2)*** $s(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{k \cdot g}{m}} \cdot t\right)\right|\right)$ mit $k = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho}{2}$

6.147 8,71$\dot{6}$ km

6.149 3 J

6.150 – 6.161

6.150 ***1)*** $W = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$ ***2)*** $W = m \cdot g \cdot h$ ***3)*** 147,15 J

6.151 ***1)*** Die Leistung P ist die Ableitung der Energie E nach der Zeit t. Umgekehrt ist daher die Energie E das Integral der Leistung P.

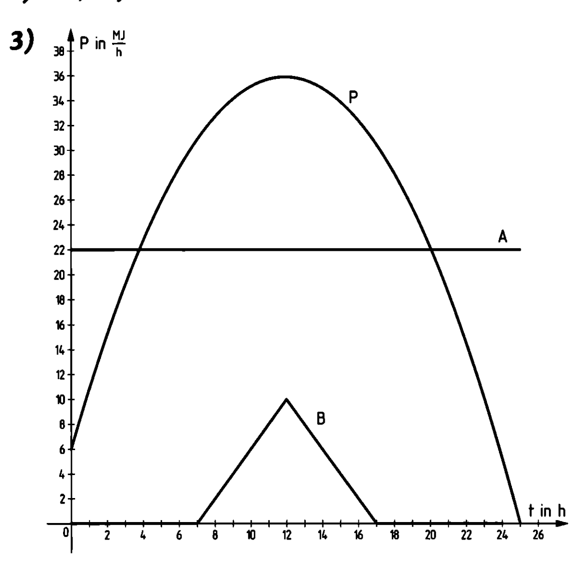
2) A: $P(t) = 22$

$$B: P(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < 7 \\ 2t - 14 & 7 \leqslant t < 12 \\ -2t + 34 & 12 \leqslant t < 17 \\ 0 & 17 \leqslant t \leqslant 24 \end{cases}$$

P … Leistung in $\frac{MJ}{h}$

t … Zeit in h

3)



4) Es müssen 23 MJ zugekauft werden.

6.152 $W = 4{,}352... \cdot 10^{-18}\,\text{Ws} - 2{,}306... \cdot 10^{-28}\,\text{Wms} \cdot \frac{1}{r_1}$

6.153 $2{,}216... \cdot 10^{10}$ J

6.154 ***1)*** $W = \frac{m}{2} \cdot (v_2^{\,2} - v_1^{\,2})$ ***2)*** $W = \frac{m \cdot v^2}{2}$ ***3)*** 93,75 kJ

6.155 ***1)*** $W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ ***2)*** $W = n \cdot R \cdot T \cdot \ln(2)$

6.156 ***1)*** $W = n \cdot R \cdot (T_a - T_b) \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ ***2)*** 102,170... kJ

6.158 ***a)*** ***1)*** Gleichanteil: $\bar{u} = 1$ V,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 1 V nach unten verschoben.
2) $U_{eff} = 2$ V

b) ***1)*** Gleichanteil: $\bar{u} = 9$ V,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 9 V nach unten verschoben.
2) $U_{eff} = 11{,}180...$ V

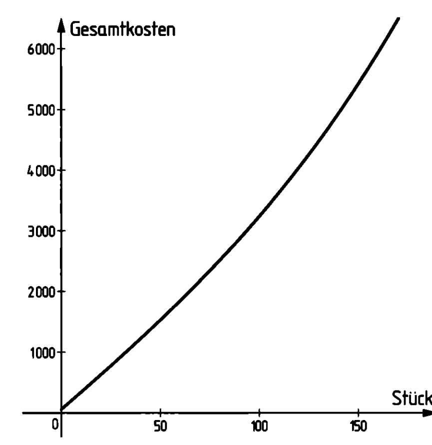
6.159 ***a)*** ***1)*** Gleichanteil: $\bar{i} = 0{,}5$ mA,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 0,5 mA nach unten verschoben.
2) $I_{eff} = 1{,}658...$ mA

b) ***1)*** Gleichanteil: $\bar{i} = 1$ mA,
Wechselanteil: Die angegebene Kurve wird um 1 mA nach unten verschoben.
2) $I_{eff} = 1{,}732...$ mA

6.160 ***a)*** 0,0384... C ***b)*** 0,0358... C

6.161 59,622... V

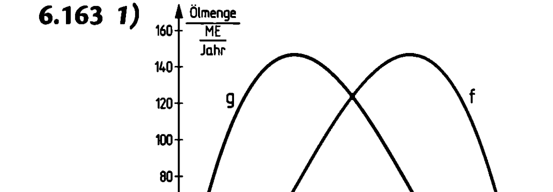
6.162 ***1)*** $K(x) = \frac{\sqrt{(x^2 + 1\,600)^3}}{3\,000} + 30x + \frac{175}{3}$



Es fehlt die Angabe einer Kapazitätsgrenze.
Im dargestellten Bereich verläuft die Kostenfunktion annähernd linear.
Die Gesamtkosten der Produktion steigen mit zunehmender Stückzahl.
Es liegen im dargestellten Bereich keine lokalen Extremwerte vor.
Daher ist die Funktion zur Beschreibung des Kostenverlaufs geeignet.

2) 47 Stück (47,078...), 32,91 $\frac{€}{\text{Stück}}$ (32,908...)

6.163 ***1)***



Beide Modelle prognostizieren dieselbe geförderte Ölmenge für die nächsten 10 Jahre.
Die Berechnung ergibt für beide Modelle $833,\dot{3}$ Mengeneinheiten.

2) 1 036,52 € (1 036,521...) bei Modell f bzw. 966,38 € (966,376...) bei Modell g

6.164 ***1)*** Bei steigenden Absatzmengen soll der Preis aus Produzentensicht steigen. Bei steigender Nachfrage soll der Preis aus Konsumentensicht fallen.

2) S(67,670... ME|77,825... $\frac{€}{ME}$)
Bei 68 Mengeneinheiten berechnet sich der Marktgleichgewichtspreis von 78,00 $\frac{€}{ME}$.
Bei diesem Preis stimmen Angebot und Nachfrage überein.

3) orange Fläche: 1 907,27 € (1 907,269...), rote Fläche: 1 441,20 € (1 441,200...)
Die orange Fläche gibt den Betrag an, den sich der Konsument erspart, da der Marktpreis niedriger ist als jener Preis, den der Konsument zu bezahlen bereit gewesen wäre.
Die rote Fläche gibt den Betrag an, den der Produzent mehr erhält, da der Marktpreis höher ist als jener Preis, ab dem der Produzent bereit gewesen wäre das Produkt anzubieten.

6.165 ***1)*** Die ärmeren 80 % der Bevölkerung erhalten 54 % des Gesamteinkommens.

2) ***A)*** ca. 1 % ***B)*** ca. 10 % ***C)*** ca. 25 %

3) g = 0,452...

4) 27,6 % (Stand 2012, erstellt am 17. 12. 2013, Statistik Austria, EU-SILC 2012)
Bei einer totalen Gleichverteilung ist g gleich 0 %, bei einer totalen Konzentration auf eine Person ist g gleich 100 %. Ein Wert von 27,6 % entspricht daher einer eher geringen Ungleichverteilung zugunsten der reicheren Einkommensschicht.

6.166 19 299 478,00 € (19 299 477,995...)

6.167 – 6.181

6.167 ***a)*** $11{,}\dot{3}\ E^2$ ***b)*** $28{,}58\dot{3}\ E^2$

6.168 ***a)*** $5{,}\dot{3}\ E^2$ ***b)*** $6{,}\dot{6}\ E^2$ ***c)*** $0{,}303...\ E^2$ ***d)*** $3{,}151...\ E^2$

6.169 ***a) 1)*** $19{,}687...\ E^3$ ***2)*** $12{,}566...\ E^3$ ***b) 1)*** $5{,}497...\ E^3$ ***2)*** $10{,}995...\ E^3$

6.170 $13{,}522...\ dm^3$

6.171 $30{,}846...\ E^2$

6.172 $S(1{,}820...|0{,}606...)$

6.173 $2{,}4\overline{90}\ \%$

6.174 $V = 2\pi^2Rr^2$, $M = 4\pi^2Rr$
Gleiches Volumen hat ein Zylinder mit Radius r und einer Höhe von $h = 2\pi \cdot R$.

6.175 ***1)*** im Schwerpunkt $S(20\ cm|1{,}677...\ cm)$ ***2)*** $81{,}692...\ cm$

6.176 ***1)*** $A = 1{,}565...\ m^2$, $u = 4{,}689...\ m$ ***2)*** $37{,}571...\ kg$ ***3)*** $S(19{,}546...\ cm|-5{,}365...\ cm)$

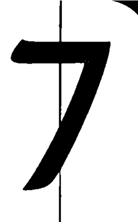
6.177 ***1)*** $473{,}998...\ g$ ***2)*** $S(-22{,}125...\ mm|-3{,}443...\ mm)$

6.178 ***a)*** $4{,}2\dot{6}\ E^2$ ***b)*** $90{,}461...\ E^2$

6.179 ***a)*** $1{,}405...\ E$ ***b)*** $10{,}614...\ E$

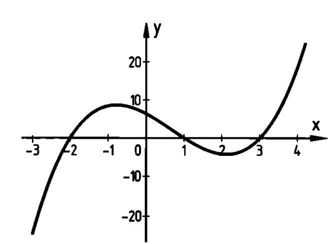
6.180 $V = 45{,}574...\ E^3$, $O = 48{,}197...\ E^2$, $S(0{,}882...|0)$

6.181 ***1)*** $v(t) = 13{,}\dot{8}\ \frac{m}{s} - 0{,}6\ \frac{m}{s^2} \cdot t$ ***2)*** $10{,}\dot{8}\ \frac{m}{s}$ ***3)*** $61{,}9\dot{4}\ m$



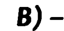
Näherungsverfahren

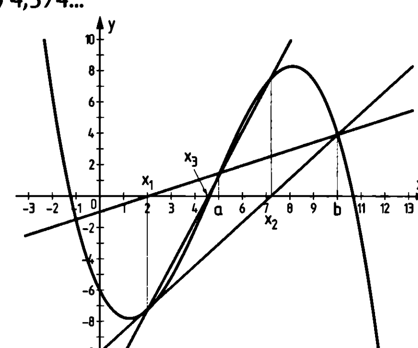
7.1 ***1)*** 3
2) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$

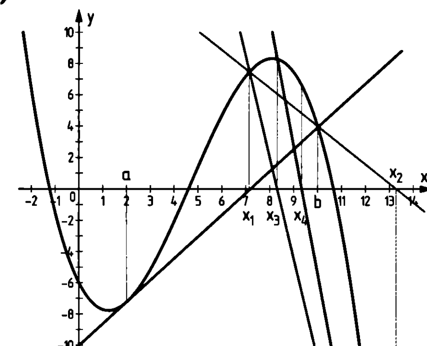


7.3 ***a)*** $x = -1{,}327...$ ***b)*** $x = -1{,}050...$ ***c)*** $x = 2{,}396...$ ***d)*** $x_1 = -0{,}920..., x_2 = 1{,}209...$

7.4 ***a)*** $x = 2{,}094...$ ***b)*** $x = 2{,}465...$ ***c)*** $x_1 = -0{,}575..., x_2 = 1{,}187..., x_3 = 4{,}388...$ ***d)*** $x = -1{,}650...$

7.5 ***1) A)*** 4,574... ***B)*** – 





2) Bei ***A)*** sind beide Startwerte größer als die zu berechnende Nullstelle. Die zugehörigen Funktionswerte sind beide positiv. Bei ***B)*** ist ein Startwert kleiner und der zweite größer als die zu berechnende Nullstelle. Die zugehörigen Funktionswerte haben verschiedene Vorzeichen. Bei der näherungsweisen Berechnung der gesuchten Nullstelle mittels der Nullstellen von Sekanten werden jeweils der zweite Startwert und die Nullstelle der Sekante als Startwerte für den nächsten Iterationsschritt verwendet. Die Art des Vorzeichens der Funktionswerte ist unerheblich. Die angegebenen Eigenschaften der Startwerte sind daher für die Nullstellenermittlung nicht entscheidend.
Die in ***A)*** angegebenen Startwerte sind zur Berechnung der gesuchten Nullstelle im Intervall [0; 10] geeignet. Mit den in ***B)*** angegebenen Startwerten ergibt die Berechnung eine außerhalb des Intervalls liegende Nullstelle.

3) $x = 4{,}57...$
Verwendet man zB die Startwerte $a = 4$ und $b = 5$, hat bei der Berechnung mit Regula falsi die zweite Näherung zwei gesicherte Dezimalstellen. Bei der Berechnung in ***1) A)*** hat die sechste Näherung zwei gesicherte Nachkommastellen. Wegen der verschiedenen Startwerte kann daraus aber keine Aussage über die Effizienz der beiden Verfahren abgeleitet werden.

7.6 ***a)*** $x = 2{,}501...$
Verwendet man zB die Startwerte $a = 2$ und $b = 3$, hat bei der Berechnung mit der Methode der Intervallhalbierung die vierzehnte Näherung drei gesicherte Nachkommastellen. Bei der Berechnung mit Regula falsi hat bereits die fünfte Näherung drei gesicherte Dezimalstellen. Die Intervallhalbierung hat aber den Vorteil, dass die Näherungen sehr einfach zu berechnen sind.

b) $x = 1{,}371...$
Verwendet man zB die Startwerte $a = 1$ und $b = 2$, hat bei der Berechnung mit der Methode der Intervallhalbierung die zwölfte Näherung drei gesicherte Nachkommastellen. Bei der Berechnung mit Regula falsi hat bereits die vierte Näherung drei gesicherte Dezimalstellen. Die Intervallhalbierung hat aber den Vorteil, dass die Näherungen sehr einfach zu berechnen sind.

7.8 – 7.13

7.8	***a)*** 1,194...	***b)*** −2,186...	***c)*** 4,807...	***d)*** 3,129...
7.9	***a)*** −0,486...	***b)*** 1,562...	***c)*** 0,712...	***d)*** −2,048...
7.10	***a)*** 4,536...	***b)*** −0,515...	***c)*** 0,703...	***d)*** 1,380...

7.11 ***a)*** $x = 3{,}327...$

Der Wert 5 ist als Startwert geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die gesuchte Nullstelle.

b) $x = 1{,}629...$

Der Wert 3 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die nächstgrößere Nullstelle außerhalb des angegebenen Intervalls. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = 2$.

c) $x = -2{,}340...$

Der Wert −2 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten oszilliert zwischen den Werten −2 und +2. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = -2{,}5$.

d) $x = 0{,}357...$

Der Wert 2 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die nächstgrößere Nullstelle außerhalb des angegebenen Intervalls. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = 1$.

e) $x = -3{,}141...$

Der Wert −2 ist als Startwert nicht geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen eine Nullstelle außerhalb des angegebenen Intervalls. Ein geeigneter Startwert ist zB $x_0 = -3$.

f) $x = -0{,}247...$

Der Wert null ist als Startwert geeignet. Die Folge der Nullstellen der Tangenten konvergiert gegen die gesuchte Nullstelle.

7.12 $S_1(-1{,}964...|0{,}140...)$, $S_2(1{,}058...|2{,}880...)$

7.13 ***a)*** $\sqrt{2} = 1{,}414...$

Quadrieren und Umformen der Gleichung $x = \sqrt{2}$ ergibt die Gleichung $0 = x^2 - 2$.
$\sqrt{2}$ ist daher die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$.
Erstellen einer Wertetabelle liefert als erste Näherung zB den Wert $x_0 = 1$.
Berechnen der ersten Ableitung und Erstellen einer Tabelle mit den Werten x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und der Näherung $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
Wiederholen des Vorgangs durch Einfügen weiterer Zeilen bis die angegebene Genauigkeit erreicht ist.

b) $\sqrt{7} = 2{,}645...$

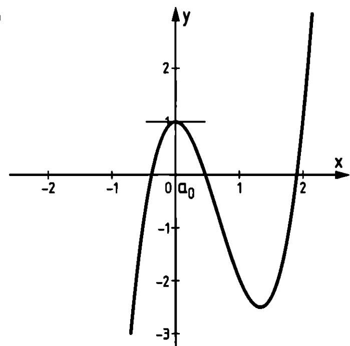
Quadrieren und Umformen der Gleichung $x = \sqrt{7}$ ergibt die Gleichung $0 = x^2 - 7$.
$\sqrt{7}$ ist daher die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 7$.
Erstellen einer Wertetabelle liefert als erste Näherung zB den Wert $x_0 = 3$.
Weitere Vorgehensweise siehe ***a)***.

c) $\sqrt[3]{11} = 2{,}223...$

Kubieren und Umformen der Gleichung $x = \sqrt[3]{11}$ ergibt die Gleichung $0 = x^3 - 11$.
$\sqrt[3]{11}$ ist daher die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 11$.
Erstellen einer Wertetabelle liefert als erste Näherung zB den Wert $x_0 = 2$.
Weitere Vorgehensweise siehe ***a)***.

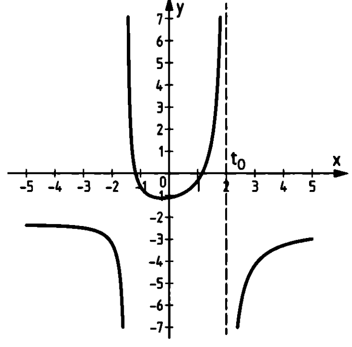
d) $\sqrt[5]{91} = 2{,}464...$
Potenzieren mit fünf und Umformen der Gleichung $x = \sqrt[5]{91}$ ergibt die Gleichung $0 = x^5 - 91$.
$\sqrt[5]{91}$ ist daher die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^5 - 91$.
Erstellen einer Wertetabelle liefert als erste Näherung zB den Wert $x_0 = 3$.
Weitere Vorgehensweise siehe ***a)***.

7.14 *1)*



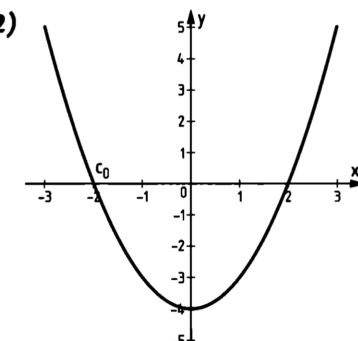
Die Funktion hat an der Stelle des Startwerts eine waagrechte Tangente.

3)



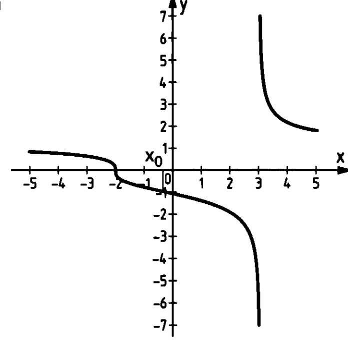
Die Funktion ist an der Stelle des Startwerts nicht definiert.

2)



Die Funktion hat an der Stelle des Startwerts bereits eine Nullstelle.

4)



Die Folge der Nullstellen der Tangenten divergiert.

7.15 *1)* N_2
2) Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente. Diese schneidet die x-Achse nicht. Der Vorgang kann nicht fortgesetzt werden.
3) $x_0 = -0{,}3$ ist nicht geeignet, da damit die Nullstelle N_1 berechnet wird.
$x_0 = 5$ ist als Startwert geeignet, da an dieser Stelle der Schnittpunkt der Tangente an die Kurve mit der x-Achse zwischen x_{N2} und 5 liegt.

7.16 11, 12 und 13

7.17 *1)* 25 Bewohner bis 78 Bewohner
2) 56 Bewohner (56,327...)
3) 34 272,00 €
4) mindestens 3 Bewohner (2,354...) zusätzlich bzw. höchstens 24 Bewohner (24,713...) zusätzlich

7.18 6,731... m

7.19 75 und 12 bzw. 3 und –60 bzw. 48 und –15

7.20 Grundkantenlänge: 13,682... cm, Dochtlänge: 10,157... cm bzw.
Grundkantenlänge: 7,924... cm, Dochtlänge 28,301... cm

7.23 ***a) 1)*** 3,512… ***2)*** 3,482…
b) 1) 0,305… ***2)*** 0,309…
c) 1) 0,847… ***2)*** 0,873… (obere Grenze 1,2)
d) 1) 19,351… ***2)*** 19,453…

7.24 ***a) 1)*** 1,242… ***2)*** 1,282… ***c) 1)*** $0{,}58\dot{3}$ ***2)*** 0,558…
b) 1) 0,869… ***2)*** 0,895… ***d) 1)*** 2,127… ***2)*** 2,095…

7.25 ***1)*** 35,2 dm^2
2)

	Fehler absolut	Fehler relativ
Querschnittsfläche	2,3 dm^2	$6{,}1\dot{3}$ %
Volumen	18,212… L	12,347… %

7.29

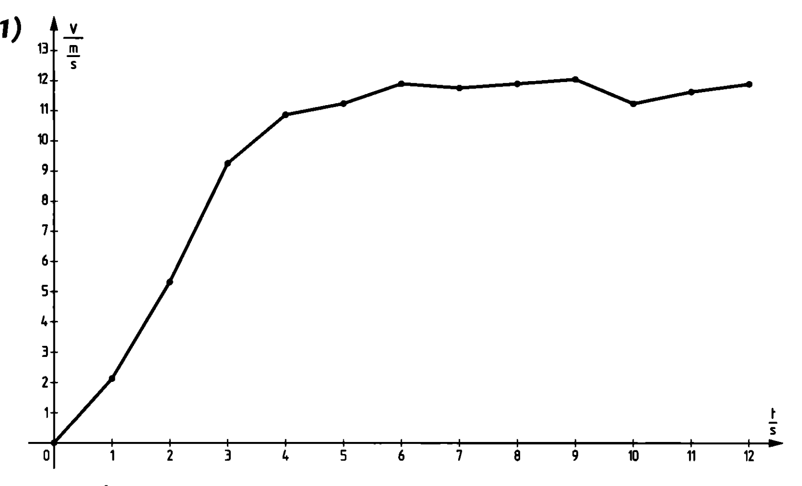
	1) Berechnung analytisch	2) Berechnung näherungsweise	relativer Fehler
a)	2	2,094…	4,719… %
b)	3,126…	2,691…	13,907… %
c)	1,098…	$1{,}\dot{1}$	1,137… %
d)	57	57	0 %

7.30 ***a) 1)*** 16,538… ***2)*** 16,471…
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der ersten Nachkommastelle.
b) 1) 0,481 174 0… ***2)*** 0,481 174 7…
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der siebenten Nachkommastelle.
c) 1) 1,922 53… ***2)*** 1,922 44…
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der vierten Nachkommastelle.
d) 1) 3,820 28… ***2)*** 3,820 19…
Die Ergebnisse unterscheiden sich ab der vierten Nachkommastelle.

7.31 ***1)*** 368,089… L ***2)*** 95,603… cm

7.32 $368{,}5\dot{3}$

7.33 ***1)***



2) $115{,}54\dot{3}$ m

7.34 $W \approx 2{,}05$ Nm (Simpsonformel, $n = 2$)

7.35 ***1)*** $14{,}12\ m^2$ ***2)*** $448{,}907...$ g

7.36 ***1)*** $9{,}7\dot{3}\ m^2$ ***2)*** $3\,080{,}6$ g ***3)*** $18\,483\,600$ m

7.37 ***1)*** Mit einer ungeraden Anzahl von Intervallen lässt sich die Simpson-Regel nicht anwenden. Da sich der Durchmesser des Glaskolbens ab der Höhe von 16 cm nicht mehr ändert, berechnet man von $h = 0$ cm bis $h = 16$ cm den Inhalt der Längsschnittfläche mit der Simpson-Regel und addiert dazu den Flächeninhalt eines Quadrats mit 4 cm Seitenlänge.
$131{,}7\dot{3}\ cm^2$
2) $755{,}657...\ cm^3$

7.38 ***1)*** $0{,}632...$ ***2)*** ca. 1 500

7.39 $a = R - h$ und $b = R \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2R-h}{2}$ und $b - a = h$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
Einsetzen in die Volumsformel der Kepler'schen Fassregel ergibt

$$V \approx \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot \left(\left(\sqrt{R^2 - (R-h)^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{2R-h}{2}\right)^2}\right)^2 + 0\right).$$

Ausrechnen der Klammern und Vereinfachen ergibt $V \approx \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (6Rh - 2h^2)$.
Herausheben von 2h und Kürzen mit 2 ergibt die angegebene Formel.

7.40 Berechnung des Integrals ergibt

$$\int_a^b (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\,dx = a_3 \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} + a_2 \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} + a_1 \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + a_0 \cdot (b - a)$$

Berechnung mit der Kepler'schen Fassregel ergibt

$$\frac{b-a}{6} \cdot \left(a_3a^3 + a_2a^2 + a_1a + a_0 + 4 \cdot \left(a_3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + a_0\right) + a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0\right) =$$
$$= \frac{b-a}{6} \cdot \left(a_3 \cdot \left(a^3 + b^3 + \frac{(a+b)^3}{2}\right) + a_2 \cdot (a^2 + b^2 + (a+b)^2) + a_1 \cdot (a + b + 2 \cdot (a+b)) + 6a_0\right) =$$
$$= a_3 \cdot \frac{3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3}{2} \cdot \frac{b-a}{6} + a_2 \cdot (2a^2 + 2ab + 2b^2) \cdot \frac{b-a}{6} + a_1 \cdot (3a + 3b) \cdot \frac{b-a}{6} + a_0 \cdot (b - a) =$$
$$= a_3 \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} + a_2 \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} + a_1 \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + a_0 \cdot (b - a)$$

7.41 ***a)*** $t_1 = -0{,}405...$, $t_2 = 7{,}541...$ ***b)*** $x = -1{,}423...$ ***c)*** $t_1 = -1{,}515...$, $t_2 = 1{,}082...$ ***d)*** $x_1 = -1{,}097...$, $x_2 = 2{,}430...$ ***e)*** $t_1 = 0{,}661...$, $t_2 = 3{,}338...$ ***f)*** $x = -0{,}329...$

7.42 ***a)*** $x = 1{,}246...$ ***b)*** $b = -2{,}363...$ ***c)*** $x = 1{,}873...$ ***d)*** $g = 2{,}618...$ ***e)*** $t = 1{,}479...$ ***f)*** $x = 0{,}876...$

7.43 ***1)*** unendlich viele
2) bei den Null- bzw. Extremstellen der Funktion $h(x) = \tan(x) - e^x$
3) zB $x_0 = 1{,}4$; $x = 1{,}306...$

7.44 $\ell = 29$ cm, $b = 17$ cm, $h = 13$ cm

7.45 ***a)*** $\frac{1}{3}$ ***b)*** $3{,}141...$ ***c)*** $9{,}374...$ ***d)*** $3{,}024...$

7.46 **a)** 2,139... **b)** 0,916... **c)** 1,557... **d)** 0,335...

7.47 $a_1 = 6$ ft and $h_1 = 2$ ft or $a_2 = 3$ ft and $h_2 = 8$ ft

7.48 ***1)*** $n = 4$: $A \approx \frac{ab}{3} \cdot (1 + \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15})$

$n = 10$: $A \approx \frac{2ab}{75} \cdot \left(19 + 2 \cdot (\sqrt{19} + \sqrt{21} + \sqrt{24} + \sqrt{51} + \sqrt{75} + \sqrt{91} + \sqrt{99})\right)$

	2)	**3) absolute error**	**3) relative error**
n = 4	$A \approx 30{,}835...\ cm^2$	$0{,}579...\ cm^2$	1,846... %
n = 10	$A \approx 31{,}270...\ cm^2$	$0{,}145...\ cm^2$	0,464... %
exact result	$A = 31{,}415...\ cm^2$	–	–

4) The precision of Simpson's rule is quite good, even if the n you use is as small as 4. If n is increased, the error decreases fast.

7.49 **a)** 19,311... **b)** 0,499... **c)** 51 **d)** 6

Matrizen 8

8.1 *1)* $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 13 & 7 \end{pmatrix}$

2) Die Verkaufszahlenmatrix für Februar wird mit 2 multipliziert:

$\begin{pmatrix} 10 & 16 & 8 \\ 16 & 26 & 14 \end{pmatrix}$

3) Die Verkaufszahlenmatrizen für Februar und März werden addiert:

$\begin{pmatrix} 15 & 24 & 12 \\ 24 & 39 & 21 \end{pmatrix}$

8.3 **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -15 \\ 33 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

b) Die Addition ist nicht möglich, da die Matrizen nicht vom gleichen Typ sind.

c) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

d) Die Multiplikation ist nicht möglich, da die Spaltenanzahl von A nicht mit der Zeilenanzahl von D übereinstimmt.

e) $\begin{pmatrix} 55 & 38 & -35 \\ -55 & 6 & -20 \end{pmatrix}$

f) Die Multiplikation ist nicht möglich, da die Spaltenanzahl von B nicht mit der Zeilenanzahl von D übereinstimmt.

8.4 *1)* Die Elemente in Tabelle 3 geben an, wie viele Widerstände, Kondensatoren, Spulen und Spannungsquellen jeweils in Bausatz B1 bzw. in Bausatz B2 enthalten sind. Alle Tabellen als Matrizen interpretiert, ist Tabelle 3 das Produkt aus Tabelle 1 und Tabelle 2.

2) $a_{31} = 7$, $a_{22} = 35$, $x = 0$, $y = 2$

3) Gesamtkosten für Bausatz 1: 74,50 €, Gesamtkosten für Bausatz 2: 131,90 €

4) Tabelle 2 muss mit 2 multipliziert werden. Damit wird automatisch auch Tabelle 3 mit 2 multipliziert.

8.7 **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

8.8 **a)** I: $5x - 4y = 3$
II: $2x + y = 5$

2) I: $b = 2$
II: $2a - 4c = 6$
III: $a + 5c = 0$

3) I: $v + 4w = 0$
II: $7u - v + 5w = 0$
III: $u + 2w = 0$

8.9 B, weil $M \cdot B = E$.

8.10 **a)** $x = 2$, $y = 0{,}5$, $z = -1$

b) Nicht eindeutig lösbar, da die Determinante der Gleichungsmatrix null ist.

c) $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{11}{6}$, $c = \frac{2}{5}$, $d = \frac{8}{5}$

8.11 – 8.18

8.11 Die Gleichungssysteme unterscheiden sich nur durch die Konstanten. Die Koeffizientenmatrix ist bei ***1)***, ***2)*** und ***3)*** gleich. Die inverse Matrix muss daher nur einmal berechnet werden.

a) 1) $a = -\frac{3}{7}, b = -\frac{38}{7}, c = -\frac{15}{7}$ ***2)*** $a = \frac{5}{21}, b = \frac{25}{7}, c = \frac{4}{21}$ ***3)*** $a = -\frac{1}{7}, b = \frac{20}{7}, c = \frac{2}{7}$

b) 1) $a = \frac{11}{3}, b = -\frac{2}{3}, c = \frac{16}{3}$ ***2)*** $a = b = c = 0$ ***3)*** $a = 4, b = -1, c = 7$

8.12 0,03 € Kosten für eine Schraube, 0,02 € für einen Dübel und 7,50 € für eine Holzlatte.

8.13 ***1)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{2x} \\ F_1 + F_{2y} \\ F_1 \cdot \ell_1 + F_{2y} \cdot \ell_2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell} \end{pmatrix}$, $A_x = -212{,}132\ldots$ N, $A_y = 153{,}033\ldots$ N, $B = 259{,}099\ldots$ N

3) Es ändern sich nur die Konstanten. Multiplikation der unveränderten inversen Matrix mit dem angepassten Vektor der Konstanten ergibt die Auflagerkräfte.

8.14 ***1)***

1	0	–8	2	0	–5	1. Zeile: I – 2 · II
0	1	0	–1	–5	13	2. Zeile: II – 5 · III
0	0	1	0	1	–2	
1	0	0	2	8	–21	1. Zeile: I + 8 · III
0	1	0	–1	–5	13	
0	0	1	0	1	–2	

Probe: $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot A = E$

2) Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

8.15 ***1)*** (8|8)

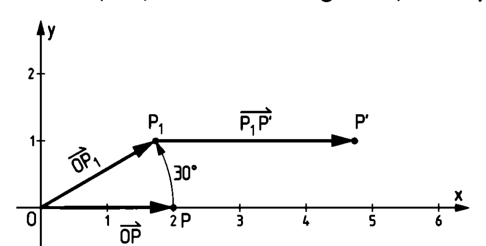
2) Die Multiplikation mit der Matrix A bewirkt eine Streckung des Ortsvektors. Die Multiplikation mit der Matrix B bewirkt eine Streckung und Drehung des Ortsvektors.

8.17 Die Multiplikation mit der Matrix M ergibt einen Vektor mit vertauschten Koordinaten und mit geänderten Vorzeichen. Das entspricht einer Drehung des Vektors.

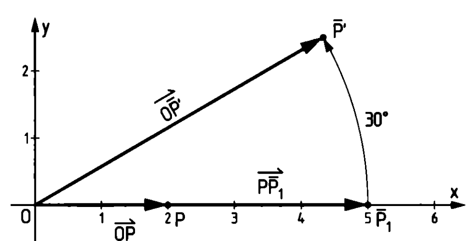
8.18 Bei der Drehung um die x-Achse muss die x-Koordinate eines Ortsvektors unverändert bleiben, daher lautet die erste Zeile der Drehmatrix (1 0 0). Die x-Koordinate darf sich auf die neue y- und z-Koordinate nicht auswirken, daher müssen die restlichen Elemente in der ersten Spalte null sein. Die weiteren Elemente stimmen mit den Elementen der Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$ überein.
Analog zu den Überlegungen zur Drehung um die x-Achse müssen bei der Drehung um die y-Achse die Elemente der zweiten Zeile (0 1 0) sein und die restlichen Elemente der zweiten Spalte null sein. Die weiteren Elemente stimmen mit den Elementen der Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$ überein, wobei bei den Elementen mit sin(φ) die Vorzeichen vertauscht sind.

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, M_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

8.20 ***1)*** P um 30° um den Koordinatenursprung drehen ergibt $P_1(\sqrt{3}\,|\,1)$. P_1 um den Vektor (3, 0) verschieben ergibt $P'(4{,}732...|1)$.



2) P um den Vektor (3, 0) verschieben ergibt $\bar{P}_1(5|0)$. $\bar{P}_1$ um 30° um den Koordinatenursprung drehen ergibt $\bar{P}'(4{,}330...|2{,}5)$.



In ***1)*** wird der Ortsvektor zuerst mit der Drehmatrix D und anschließend das Ergebnis mit der Schiebungsmatrix S multipliziert und es gilt $\overrightarrow{OP'} = S \cdot D \cdot \overrightarrow{OP}$. In ***2)*** wird zuerst mit S und anschließend mit D multipliziert und es gilt $\overrightarrow{O\bar{P}'} = D \cdot S \cdot \overrightarrow{OP}$. Da die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist, sind die Ergebnisse verschieden.

8.21 ***1)*** Man dreht den Punkt P um den Winkel $-\alpha$ um den Ursprung, spiegelt den gedrehten Punkt an der x-Achse und dreht den gespiegelten Punkt um den Winkel α.

2) „Drehung um $-\alpha$, Spiegelung an der x-Achse, Drehung um α" ergibt die Transformationsmatrix

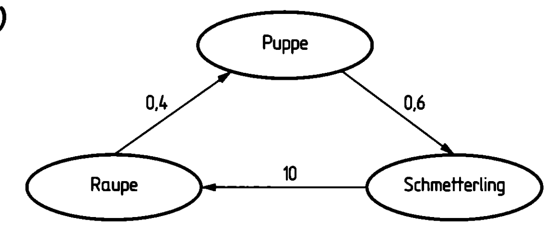
$$\begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

„Spiegelung an der geneigten Geraden" ergibt die Spiegelungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(60°) & \sin(60°) \\ \sin(60°) & -\cos(60°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ Die beiden Matrizen stimmen überein.

8.22 ***1)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***2)*** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P'(0|-2|3)$

8.23 ***1)***



2) Ist die Anzahl in der Reihenfolge (Raupen-, Puppen-, Flugstadium) angegeben, so lautet die

Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$.

3) 200 Raupen, 40 Puppen, 30 Schmetterlinge nach zwei Wochen, 300 Raupen, 80 Puppen, 24 Schmetterlinge nach vier Wochen.
Die Anzahl der Raupen steigt und die Anzahl der Puppen verdoppelt sich, während die Anzahl der Schmetterlinge sinkt.

8.24 ***1)*** Matrix B.
An einem Tag fahren mit dem Zug 60 % der Personen, die auch am Vortag mit dem Zug fuhren, und 55 % der Personen, die am Vortag mit dem Bus fuhren. Mit dem Bus fahren 40 % der Personen, die am Vortag mit dem Zug fuhren, und 45 % der Personen, die auch am Vortag mit dem Bus fuhren.
Es gilt daher $Z_1 = 0{,}6 \cdot Z_0 + 0{,}55 \cdot B_0$ und $B_1 = 0{,}4 \cdot Z_0 + 0{,}45 \cdot B_0$
bzw. in Matrizenschreibweise $\begin{pmatrix} Z_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}55 \\ 0{,}4 & 0{,}45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} Z_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$.

2)

	Bus	**Zug**
Montag	100 Personen	40 Personen
Freitag	59 Personen (58,947...)	81 Personen (81,052...)

8.25 ***A)*** Falsch. Es wird jeweils ein Zeilenvektor der linken Matrix mit einem Spaltenvektor der rechten Matrix skalar multipliziert. Die Durchführbarkeit der Multiplikation ist von der Anzahl der Spalten der linken Matrix und von der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix abhängig.
B) Richtig. Die beiden Zeilenvektoren der (2x3)-Matrix werden mit den vier Spaltenvektoren der (3x4)-Matrix multipliziert. Das Ergebnis ist daher eine Matrix mit zwei Zeilen und vier Spalten.
C) Falsch. Sind die Zeilen der Koeffizientenmatrix linear abhängig, so sind auch die Gleichungen, aus deren Koeffizienten die Matrix gebildet wurde, linear abhängig. Ein Gleichungssystem ist nur eindeutig lösbar, wenn die Gleichungen linear unabhängig sind.

8.26 ***a)*** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ***c)*** Nur eine quadratische Matrix ist invertierbar.
d) Die Spaltenanzahl 3 der Matrix B und die Zeilenanzahl 1 der Matrix C sind verschieden.
e) Die Spaltenanzahl 3 der Matrix B und die Zeilenanzahl 2 der Matrix D sind verschieden.
f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

8.27 ***1)*** $\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 10 & 30 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 10 & 30 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

Tab. 3	**E1**	**E2**	**E3**
R1	420	460	440
R2	290	330	310
R3	230	190	210

2) 20 000 Stück von R1, 14 150 Stück von R2, 9 250 Stück von R3
3) Die Mengen in Tabelle 3 werden ebenfalls halbiert.
Werden die Mengen in Tabelle 1 halbiert, sind alle bei der Matrizenmultiplikation auftretenden Produkte auch nur halb so groß. Die Summen der halb so großen Produkte, das sind die Einträge der Tabelle 3, sind dann ebenfalls nur halb so groß.

8.28 ***a)*** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, x = 10, y = 4, z = −5

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, nicht eindeutig lösbar

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a = 0,\overline{54}$, b = 1,397..., c = 1,5, $d = 1,\overline{45}$

8.29 ***1)*** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, P′(3,232...|−1,598...)

Einsetzen des Drehwinkels φ = −60° in die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ ergibt die angegebene Transformationsmatrix. Multiplikation der Transformationsmatrix mit den Koordinaten des Punkts P ergibt die Koordinaten des Punkts P′.

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$, P′(9|3)

Einsetzen der Faktoren 3 und 1,5 in die Streckungsmatrix $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$ ergibt die angegebene Transformationsmatrix. Multiplikation der Transformationsmatrix mit den Koordinaten des Punkts P ergibt die Koordinaten des Punkts P′.

3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, P′(0,232...|3,598...)

Einsetzen des Drehwinkels φ = 60° in die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ ergibt die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Die Spiegelung an der y-Achse wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Hintereinander ausführen der beiden Transformationen ergibt die Matrizenmultiplikation $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Das Ergebnis der Multiplikation ist die angegebene Transformationsmatrix. Multiplikation der Transformationsmatrix mit den Koordinaten des Punkts P ergibt die Koordinaten des Punkts P′.

8.30 A′(1|0), B′(0|3)
Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.
Die Punkte A und B werden um 90° um den Koordinatenursprung gedreht und um den Vektor (1, −1) verschoben.

8.31 Von den Kunden, die Produkt 1 kaufen, kaufen in der darauf folgenden Woche 60 % wieder Produkt 1, 20 % Produkt 2 und 20 % Produkt 3. Von den Kunden, die Produkt 2 kaufen, kaufen in der darauf folgenden Woche 10 % Produkt 1, 30 % wieder Produkt 2 und 60 % Produkt 3. Von den Kunden, die Produkt 3 kaufen, kaufen in der darauf folgenden Woche 50 % Produkt 1, 30 % Produkt 2 und 20 % wieder Produkt 3.
Ist das Kaufverhalten für die drei Produkte in der Reihenfolge (Produkt 1, Produkt 2, Produkt 3) angegeben, so lautet die Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

8.32 **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ***b)*** calculation of inverse matrix not possible

8.33 $\begin{pmatrix} 0{,}707... & -0{,}707... & 0{,}707... \\ 0{,}707... & 0{,}707... & 0{,}292... \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algebraische Strukturen



9.1 ***1)*** Die Aussage ist mathematisch korrekt (4 Personen – 7 Personen + 3 Personen = 0), allerdings müssen unter Berücksichtigung des zeitlichen Ablaufs die 3 Personen zuerst hineingehen, um anschließend als Teil der 7 Personen den Raum verlassen zu können.
2) Für alle Zahlenbereiche, die $\mathbb{Z}$ als Teilmenge enthalten.

9.3 ***a)*** 8 ***b)*** 36 ***c)*** 513 ***d)*** 509

9.4 ***a)*** 49 ***b)*** 108 ***c)*** 155 ***d)*** 1 848

9.5 individuelle Recherche

9.8 abgeschlossen, zB $-\frac{2}{9} : \frac{4}{3} = -\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$
assoziativ, zB $\left(\frac{7}{4} : \frac{3}{2}\right) : \frac{2}{5} = \frac{35}{12}, \frac{7}{4} : \left(\frac{3}{2} : \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{15}$
Das Assoziativgesetz ist nicht erfüllt, $(\mathbb{Q}, :)$ bildet keine Gruppe.

9.9 ZB wäre –5 wegen 5 + (–5) = 0 das zu 5 inverse Element. –5 ist aber keine natürliche Zahl und $(\mathbb{N}, +)$ daher keine Gruppe.

9.10 ***a)*** $a, b, c \in \mathbb{Z}^-$
1) abgeschlossen, $a + b \in \mathbb{Z}^-$
assoziativ, $(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c)$
$\nexists$ neutrales Element, zB $-3 + 0 = -3, 0 \notin \mathbb{Z}^-$
$\Rightarrow \mathbb{Z}^-$ ist keine Gruppe bezüglich der Addition.
2) nicht abgeschlossen, zB $(-2) \cdot (-3) = 6 \notin \mathbb{Z}^-$
$\Rightarrow \mathbb{Z}^-$ ist keine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

b) $a, b, c \in \mathbb{N}$
1) abgeschlossen, $a + b \in \mathbb{N}$
assoziativ, $(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c)$
neutrales Element: $e = 0, a + e = a + 0 = 0 + a = a$
$\nexists$ inverses Element, zB $3 + (-3) = 0$, aber $(-3) \notin \mathbb{N}$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist keine Gruppe bezüglich der Addition.
2) abgeschlossen, $a \cdot b \in \mathbb{N}$
assoziativ, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
neutrales Element: $e = 1, a \cdot e = a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$\nexists$ inverses Element, zB $\frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist keine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

c) $a, b, c \in \mathbb{Q}, a = \frac{u}{v}, b = \frac{w}{x}, c = \frac{y}{z}$
1) abgeschlossen, $a + b = \frac{ux + vw}{vx} \in \mathbb{Q}$
assoziativ, $(a + b) + c = \frac{ux + vw}{vx} + \frac{y}{z} = \frac{uxz + vwz + vxy}{vxz}, a + (b + c) = \frac{u}{v} + \frac{wz + xy}{xz} = \frac{uxz + vwz + vxy}{vxz}$
neutrales Element: $e = 0, a + e = \frac{u}{v} + 0 = 0 + \frac{u}{v} = \frac{0 + u}{v} = \frac{u}{v} = a$
inverses Element: $a + (-a) = \frac{u}{v} + \left(-\frac{u}{v}\right) = \left(-\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v} = \frac{-u + u}{v} = 0$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist bezüglich der Addition eine Gruppe.
2) abgeschlossen, $a \cdot b = \frac{uw}{vx} \in \mathbb{Q}$
assoziativ, $(a \cdot b) \cdot c = \frac{uw}{vx} \cdot \frac{y}{z} = \frac{uwy}{vxz}, a \cdot (b \cdot c) = \frac{u}{v} \cdot \frac{wy}{xz} = \frac{uwy}{vxz}$
neutrales Element: $e = 1, a \cdot e = \frac{u}{v} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{u}{v} = \frac{1 \cdot u}{v} = \frac{u}{v} = a$
inverses Element: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = \frac{v}{u} \cdot \frac{u}{v} = 1$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

d) 1) nicht abgeschlossen, zB $3 + 5 = 8 \notin \mathbb{P}$

$\Rightarrow \mathbb{P}$ ist keine Gruppe bezüglich der Addition.

2) nicht abgeschlossen, zB $3 \cdot 11 = 33 \notin \mathbb{P}$

$\Rightarrow \mathbb{P}$ ist keine Gruppe bezüglich der Mulitiplikation.

9.11 ***a)*** $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$ seien komplexe Zahlen.

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d) \cdot i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ abgeschlossen bezüglich Addition,

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc) \cdot i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ abgeschlossen bezüglich Multiplikation

Untersuchung auf Abel'sche Gruppen bezüglich „+":

$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + bi + c + di) + e + fi = a + bi + (c + di + e + fi) = z_1 + (z_2 + z_3) \Rightarrow$ assoziativ

Nullelement 0: $z_1 + 0 = a + bi + 0 = 0 + a + bi = a + bi = z_1$

Inverses Element: $z_1 + (-z_1) = a + bi + (-a - bi) = (-a - bi) + (a + bi) = 0$

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = c + di + a + bi = z_2 + z_1 \Rightarrow$ kommutativ

$(\mathbb{C}, +)$ bildet eine Abel'sche Gruppe.

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (ab - cd + (ad + bc) \cdot i) \cdot (e + fi) =$

$= abe - cde - adf - bcf + (abf - cdf + ade + bce) \cdot i = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \Rightarrow$ assoziativ bezüglich „·"

Distributivgesetze:

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a + bi) \cdot (c + di + e + fi) = \ldots = (ac + adi + bci - bd) + (ae + afi + bei - bf) =$

$= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \Rightarrow$ linksdistributiv

$(z_2 + z_3) \cdot z_1 = (c+ di + e + fi) \cdot (a + bi) = \ldots = (ca + dai + cbi - db) + (ea + fai + ebi - fb) =$

$= z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1 \Rightarrow$ rechtsdistributiv

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Ring bezüglich „+" und „·".

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ abgeschlossen bezüglich Addition

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ abgeschlossen bezüglich Kreuzprodukt

Untersuchung auf Abel'sche Gruppe bezüglich „+":

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow$ assoziativ

Nullelement $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 + a_1 \\ 0 + a_2 \\ 0 + a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$

inverses Element: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + a_1 \\ -a_2 + a_2 \\ -a_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$

kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$

$\Rightarrow$ Die Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist bezüglich der Addition eine Abel'sche Gruppe.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_3 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_2 \cdot c_2 + a_2 \cdot b_1 \cdot c_2 \\ a_1 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_3 \cdot c_3 + a_3 \cdot b_2 \cdot c_3 \\ a_2 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_1 \cdot b_3 \cdot c_1 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_3 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_3 \\ a_3 \cdot b_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_1 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot c_1 \\ a_1 \cdot b_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_3 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$\Rightarrow$ Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ in der Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Distributivgesetze:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2 + b_2) \cdot c_3 - (a_3 + b_3) \cdot c_2 \\ (a_3 + b_3) \cdot c_1 - (a_1 + b_1) \cdot c_3 \\ (a_1 + b_1) \cdot c_2 - (a_2 + b_2) \cdot c_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 \cdot c_3 + b_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2 - b_3 \cdot c_2 \\ a_3 \cdot c_1 + b_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3 - b_1 \cdot c_3 \\ a_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2 \\ a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3 \\ a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_3 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} =$$

$= (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \Rightarrow$ rechtsdistributiv

Linksdistributiv kann analog gezeigt werden.

$\Rightarrow$ (Vektoren im $\mathbb{R}^3$, +, Kreuzpunkt) bildet keinen Ring.

9.12 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$ seien komplexe Zahlen.

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d) \cdot i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ abgeschlossen bezüglich Addition,

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc) \cdot i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ abgeschlossen bezüglich Multiplikation

Untersuchung auf Abel'sche Gruppen:

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = c + di + a + bi = z_2 + z_1 \Rightarrow$ kommutativ

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc) \cdot i = ca - db + (da + bc) \cdot i =$

$= (c + di) \cdot (a + bi) = z_2 \cdot z_1 \Rightarrow$ kommutativ

$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + bi + c + di) + e + fi = a + bi + (c + di + e + fi) = z_1 + (z_2 + z_3) \Rightarrow$ assoziativ

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (ab - cd + (ad + bc) \cdot i) \cdot (e + fi) =$

$abe - cde - adf - bcf + (abf - cdf + ade + bce) \cdot i = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \Rightarrow$ assoziativ

Nullelement 0: $z_1 + 0 = a + bi + 0 = 0 + a + bi = a + bi = z_1$

Einselement 1: $z_1 \cdot 1 = (a + bi) \cdot 1 = 1 \cdot (a + bi) = a + bi = z_1$

Inverses Element bezüglich der Addition: $z_1 + (-z_1) = a + bi + (-a - bi) = 0$

Inverses Element bezüglich der Multiplikation: $z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = (a + bi) \cdot \frac{1}{a + bi} = 1$

$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i \in \mathbb{C}$

Distributivgesetze:
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a + bi) \cdot (c + di + e + fi) = ... = (ac + adi + bci - bd) + (ae + afi + bei - bf) =$
$= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \Rightarrow$ linksdistributiv
Die Rechtsdistributivität folgt aus dem Kommutativgesetz in Abel'schen Gruppen.
Aus all diesen Überlegungen folgt: Die komplexen Zahlen bilden bezüglich der Addition und der Multiplikation einen Körper.

9.13 ***1)*** Die Zuordnung der Katalognummern ist eindeutig.
2) Die Zuordnung der Anfangsbuchstaben des Nachnamens ist eindeutig, da jeder Nachname nur einen Anfangsbuchstaben hat.

9.14 ***1)*** Funktion, da keinem Einwohner und keiner Einwohnerin keine Sozialversicherungsnummer zugeordnet wird und da keinem Einwohner und keiner Einwohnerin mehr als eine Sozialversicherungsnummer zugeordnet wird.
2) Im Allgemeinen ist das keine Funktion, da es auch Personen gibt, die mehrere Wohnsitze haben.
3) Funktion, da es keine Zahl gibt, die keine Ziffer oder mehrere Ziffern an der Einerstelle hat.

9.15 ***1)*** nicht reflexiv (Man kann nicht Schwester von sich selbst sein.)
symmetrisch (Wenn a Schwester von b ist, dann ist auch b Schwester von a.)
nicht antisymmetrisch (Wenn a Schwester von b ist und wenn b Schwester von a ist, dann folgt daraus nicht, dass a gleich b ist.)
transitiv (Wenn a Schwester von b ist und b Schwester von c ist, dann ist a Schwester von c.)
2) nicht reflexiv (Man kann nicht Schwester von sich selbst sein.)
nicht symmetrisch (Wenn a Schwester von b ist, dann ist b nicht automatisch Schwester von a, denn b könnte auch Bruder von a sein.)
nicht antisymmetrisch (Wenn a Schwester von b ist und wenn b Schwester von a ist, dann folgt daraus nicht, dass a gleich b ist.)
transitiv (Wenn a Schwester von b ist und wenn b Schwester von c ist, dann ist a Schwester von c.)

9.16 ***a)*** Ordnungsrelation: reflexiv (Eine natürliche Zahl a teilt sich selbst.), antisymmetrisch (Aus a teilt b und b teilt a folgt a = b.), transitiv (Aus a teilt b und b teilt c folgt a teilt c.)
b) weder noch: nicht reflexiv (zB $(2, 2) \notin R$), nicht symmetrisch (zB $(1, 2) \in R \not\Rightarrow (2, 1) \in R$), nicht antisymmetrisch (zB $(1, 2) \in R$, aber $(2, 1) \notin R$), nicht transitiv (Es gibt das Wertepaar (1, b), aber nicht das Wertepaar (b, c).)
c) Äquivalenzrelation: reflexiv (a ist gleich alt wie a.), symmetrisch (Wenn a gleich alt ist wie b, dann ist auch b gleich alt wie a, transitiv (Aus a ist gleich alt wie b und b ist gleich alt wie c folgt a ist gleich alt wie c.

9.17 zB $A = \mathbb{R}$, $aRb \Leftrightarrow a = b$

9.18 ***1)*** Freitag ***2)*** Montag ***3)*** Freitag ***4)*** Montag ***5)*** Mittwoch
Wenn weniger als sieben Tage vergangen sind, zählt man einfach die Tage weiter, sind mehr als sieben Tage vergangen, lässt man x-fache von 7 Tagen weg und zählt die restlichen Tage weiter.

9.19 ***1)*** Sind 12 Stunden vergangen, beginnt man wieder bei null (modulo 12).
2) Sind 60 Sekunden vergangen, beginnt man wieder bei null (modulo 60).

9.20 ***a)*** 0 ***b)*** 3 ***c)*** 7 ***d)*** 0

9.21 *a)*

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

b)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

9.22 *a)* $[1]_6$ *b)* $[4]_{12}$ *c)* $[5]_7$ *d)* $[7]_{10}$

9.23 Für Zehnerpotenzen gilt $[10^n]_3 = [10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10]_3 = [10]_3 \cdot [10]_3 \cdot ... \cdot [10]_3 = [1]_3 \cdot [1]_3 \cdot ... \cdot [1]_3 =$
$= [1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1]_3 = [1]_3$.
Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gilt daher $[a]_3 = [a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0]_3 =$
$= [a_n]_3 \cdot [10^n]_3 + [a_{n-1}]_3 \cdot [10^{n-1}]_3 + ... + [a_0]_3 = [a_n]_3 \cdot [1]_3 + [a_{n-1}]_3 \cdot [1]_3 + ... + [a_0]_3 =$
$= [a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0]_3$.
Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist also genau dann durch drei teilbar, wenn ihre Ziffernsumme
$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ durch drei teilbar ist.

9.24 *1)* nein, $x_{13} = 0$ *2)* nein *3)* –

9.25 Es geht um die Präsentation einer individuellen Recherche.
1) Donnerstag *2)* Freitag

9.26 *1)* $j^n = j^{[n]_4}$
2) Die Ableitungen der Sinusfunktion sind zyklisch. Die vierte Ableitung ist wieder die Sinusfunktion, die fünfte Ableitung ist gleich der ersten Ableitung usw. Die Ableitungen sind daher kongruent modulo 4 und es gilt $y^{(n)} = y^{([n]_4)}$.

9.27 Voraussetzung: $a \equiv b \bmod m$, a und b haben bei Division durch m denselben Rest.
1) $a \equiv a \bmod m$, a hat bei Division durch m denselben Rest wie a bei Division durch m ist trivialerweise richtig. Die Relation ist daher reflexiv.
2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$, wenn a und b bei Division durch m denselben Rest haben, dann haben auch b und a bei Division durch m denselben Rest ist trivialerweise erfüllt. Die Relation ist symmetrisch.
3) $a \equiv b \bmod m \wedge b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$, dh. wenn a und b bei Division durch m denselben Rest haben und wenn b und c bei Division durch m denselben Rest haben, dann haben auch a und c bei Division durch m denselben Rest. Angenommen $a \equiv c \bmod m$ ist nicht erfüllt, dh. a hat bei Division durch m den Rest r und c hat bei Division durch m den Rest q mit $r \neq q$. Wegen $a \equiv b \bmod m$ wäre dann der Rest bei Division von b durch m ebenfalls r, und wegen $b \equiv c \bmod m$ hätte die Division von b durch m den Rest q.
Das ist nicht möglich, da der Rest bei Division von b durch m nicht zwei verschiedene Werte r bzw. q haben kann.
$a \equiv c \bmod m$ muss daher gelten und die Relation ist transitiv. Die Relation $a \equiv b \bmod m$ ist daher eine Äquivalenzrelation.

9.28 $[a]_m + [b]_m = [a+b]_m \in \mathbb{Z}_m$, $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow \mathbb{Z}_m$ ist bezüglich „+" und „·" abgeschlossen.
$[a]_m + [b]_m = [a+b]_m = [b+a]_m = [b]_m + [a]_m \Rightarrow$ „+" ist kommutativ in $\mathbb{Z}_m$.
$([a]_m + [b]_m) + [c]_m = [a+b]_m + [c]_m = [a+b+c]_m = [a]_m + [b+c]_m = [a]_m + ([b]_m + [c]_m)$
$\Rightarrow$ „+" ist assoziativ in $\mathbb{Z}_m$.
$[a]_m + [0]_m = [0]_m + [a]_m = [0+a]_m = [a]_m \Rightarrow$ Die Restklasse $[0]_m$ ist Nullelement.
$[a]_m + [m-a]_m = [m-a]_m + [a]_m = [m-a+a]_m = [m]_m = [0]_m \Rightarrow$ Die Restklasse $[m-a]_m$ ist inverses Element zu $[a]_m$.
$(\mathbb{Z}_m, +)$ bildet eine Abel´sche Gruppe.
$[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m = [b \cdot a]_m = [b]_m \cdot [a]_m \Rightarrow$ „·" ist kommutativ in $\mathbb{Z}_m$.
$([a]_m \cdot [b]_m) \cdot [c]_m = [a \cdot b]_m \cdot [c]_m = [a \cdot b \cdot c]_m = [a]_m \cdot [b \cdot c]_m = [a]_m \cdot ([b]_m \cdot [c]_m) \Rightarrow$ „·" ist assoziativ in $\mathbb{Z}_m$.
$[c]_m \cdot ([a]_m + [b]_m) = [c]_m \cdot [a+b]_m = [c \cdot (a+b)]_m = [c \cdot a + c \cdot b]_m = [c \cdot a]_m + [c \cdot b]_m =$
$= [c]_m \cdot [a]_m + [c]_m \cdot [b]_m$,
$([a]_m + [b]_m) \cdot [c]_m = [a+b]_m \cdot [c]_m = [(a+b) \cdot c]_m = [a \cdot c + b \cdot c]_m = [a \cdot c]_m + [b \cdot c]_m =$
$= [a]_m \cdot [c]_m + [b]_m \cdot [c]_m \Rightarrow$ Die Distributivgesetze gelten in $\mathbb{Z}_m$.
$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ bildet einen kommutativen Ring bezüglich „+" und „·".

9.29 „Socken anziehen" ∘ „Schuhe anziehen" ≠ „Schuhe anziehen" ∘ „Socken anziehen",
„T-Shirt anziehen" ∘ „Socken anziehen" = „Socken anziehen" ∘ „T-Shirt anziehen",
„T-Shirt anziehen" ∘ „Schuhe anziehen" = „Schuhe anziehen" ∘ „T-Shirt anziehen"
$\Rightarrow$ ∘ ist nicht kommutativ

9.30 {Milch, Kaffee, Zucker, Kaffee mit Milch, Kaffee mit Zucker, Kaffee mit Milch und Zucker, Milch mit Zucker}

9.31 a ist vorgegeben, b wird von der ratenden Person genannt:
Ist $b < a$, sage „größer", ist $b > a$, sage „kleiner", ist $b = a$, sage „richtig".

9.32 ***a)*** 0,965... ***b)*** 0 ***c)*** 0,866... ***d)*** 0

9.33 ***A)*** Richtig. $(\mathbb{M}, +, \cdot)$ ist ein Ring, daher sind folgende Körperaxiome erfüllt: $\mathbb{M}$ bildet eine Abel´sche Gruppe bezüglich „+" und die Distributivgesetze gelten. Weiters bildet $\mathbb{M}\backslash\{0\}$ eine Abel´sche Gruppe bezüglich „·". Es sind daher alle Körperaxiome erfüllt.
B) Falsch. ZB ist $3 + 1 = 1 + 3 \neq 3$.
C) Falsch. ZB ist $3 + 5 = 8$ keine Primzahl. „+" ist daher keine Verknüpfung in $\mathbb{P}$.

9.34 ***a)*** abgeschlossen, zB $6 + 90 = 96 \in \mathbb{Z}^+$
assoziativ, zB $4 + (7 + 34) = (4 + 7) + 34 = 45$
$\nexists$ neutrales Element, zB $76 + 0 = 76$, $0 \notin \mathbb{Z}^+$
$\Rightarrow \mathbb{Z}^+$ weist bezüglich der Addition keine algebraische Struktur auf.
b) abgeschlossen, zB $6 + 7{,}1 = 13{,}1 \in \mathbb{Q}$
assoziativ, zB $5{,}2 + (-8{,}4 + 6) = (5{,}2 + (-8{,}4)) + 6 = 2{,}8$
neutrales Element: $e = 0$, zB $4{,}\dot{6} + 0 = 0 + 4{,}\dot{6} = 4{,}\dot{6}$
inverses Element: $a \in \mathbb{Q}: \exists \bar{a} \in \mathbb{Q}$ mit $\bar{a} + a = a + \bar{a} = 0$, zB $52{,}1 + (-52{,}1) = 0$
kommutativ, zB $\frac{1}{2} + (-3) = (-3) + \frac{1}{2} = -2{,}5$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist bezüglich der Addition eine Abel'sche Gruppe.

c) abgeschlossen, zB $12 + 35 = 47 \in \mathbb{N}$
assoziativ, zB $5 + (19 + 2) = (5 + 19) + 2 = 26$
neutrales Element: $e = 0$, zB $17 + 0 = 0 + 17 = 17$
$\nexists$ inverses Element, zB $4 + (-4) = 0$, $-4 \notin \mathbb{N}$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ weist bezüglich der Addition keine algebraische Struktur auf.
d) abgeschlossen, zB $6 + (-9) = -3 \in \mathbb{Z}$
assoziativ, zB $2 + (-4 + 6) = (2 + (-4)) + 6 = 4$
neutrales Element: $e = 0$, zB $(-4) + 0 = 0 + (-4) = -4$
inverses Element: $a \in \mathbb{Z}: \exists \bar{a} \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{a} + a = a + \bar{a} = 0$, zB $52 + (-52) = 0$
kommutativ, zB $5 + (-7) = (-7) + 5 = -2$
$\Rightarrow \mathbb{Z}$ ist bezüglich der Addition eine Abel'sche Gruppe.

9.35 Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

9.36 ***a)*** Ordnungsrelation ***b)*** Äquivalenzrelation

9.37 ***a)*** $[2]_3$ ***b)*** $[9]_{10}$ ***c)*** $[2]_7$ ***d)*** $[2]_{12}$

9.38 ***a)*** $[a]_m + [b]_m = a + k_1 \cdot m + b + k_2 \cdot m = a + b + (k_1 + k_2) \cdot m = a + b + k_3 \cdot m =$
$= [a + b]_m$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$
b) $[a]_m \cdot [b]_m = (a + k_1 \cdot m) \cdot (b + k_2 \cdot m) = a \cdot b + a \cdot k_2 \cdot m + b \cdot k_1 \cdot m + k_1 \cdot k_2 \cdot m^2 = a \cdot b +$
$+ (a \cdot k_2 + b \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2 \cdot m) \cdot m = a \cdot b + k_3 \cdot m = [a \cdot b]_m$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

9.39 Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

9.40 ***1)*** True. The set of the field is an abelian group regarding one of the two operations. The set is associative regarding the other of the two operations and the distributive laws are valid.
2) False. As the identity element is 0, the inverse element of 3 is −3. −3 is not an element of $\mathbb{N}$.
3) True. „+“ and „·“ are Operations. $(\mathbb{Q}, +)$ is commutative and associative, 0 is identity element, $-a$ is inverse element for a. $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot\}$ is commutative and associative, 1 is identity element, $\frac{1}{a}$ is inverse element for a. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot\}$ is an abelian group. The distributive laws are valid.

9.41 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ is a ring as shown in exercise **9.6.** $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, the multiplication of two integers is commutative, that means $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ is a commutative ring.

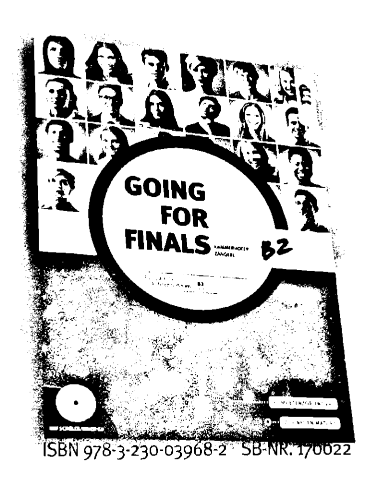


MATURA training.at

Die Maturatrainingsbücher von hpt bereiten dich bestmöglich auf die neue Reifeprüfung vor!

Das Maturatraining von hpt:

- führt dich Schritt für Schritt zum Erfolg
- bietet dir ein optimales Training
- unterstützt dich bei deiner Vorbereitung
- gibt Tipps und Hilfestellungen



ISBN 978-3-230-03968-2 SB-NR. 170022

Englisch

112 Seiten
€ 22,70

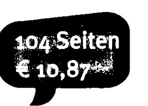
Going for Finals B2 BHS
Übungsbuch + 2 CDs

bietet lehrbuchunabhängige Übungsmaterialien, welche den GERS-Niveaus B2-, B2 und B2+ entsprechen (Einleitung mit Erklärungen und Schreibtipps, Listening Comprehension, Reading Comprehension, Writing).



Die Bücher eignen sich als Zusatzbücher für alle Lehrbuchreihen!

Deutsch



KOMPETENZ:*DEUTSCH.*
Trainingsteil für die neue RDP

bietet zusätzliches Übungsmaterial entsprechend dem neuen Format zur optimalen Vorbereitung auf die neue RDP/RP.

Hol' dir die Maturatrainingsbücher von hpt!

ONLINE
www.hpt.at
www.maturatraining.at
service@hpt.at

TELEFONISCH
Bestell-Hotline: 01 403 77 77-70
(Montag bis Donnerstag, jeweils von 7:30 bis 16:00 Uhr
Freitag, 7:30 bis 14:00 Uhr)

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH | Frankgasse 4 | 1090 Wien

Druckfehler und Preisänderungen vorbehalten.



Das Lösungsheft enthält die Lösungen zu den Aufgaben des Lehrbuchs „Mathematik mit technischen Anwendungen 3“ (Schulbuchnummer 165008).

www.hpt.at

Mathematik mit techn. Anwend. 3, Lösungen
ISBN 978-3-230-03637-7
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9 783230 036377